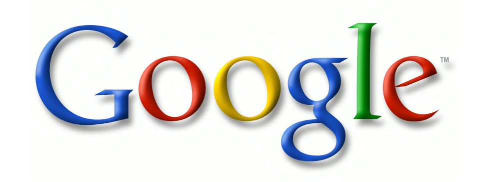
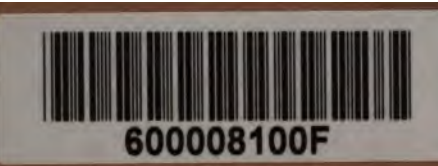












THÉORIE ET APPLICATIONS

DES

DÉTERMINANTS.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

THÉORIE ET APPLICATIONS

DES

DÉTERMINANTS,

AVEC

L'INDICATION DES SOURCES ORIGINALES;

PAR LE Dr RICHARD BALTZER,
Professeur au Gymnase de Dresde.

TRADUIT DE L'ALLEMAND,

PAR J. HOÜEL,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1861.



PRÉFACE.

Le puissant instrument que l'Algèbre et l'Analyse emploient aujourd'hui sous le nom de *Déterminants* était, il y a peu d'années encore, difficile à connaître à l'aide des seules sources auxquelles on pût alors puiser. Les grands géomètres s'étaient créé ce moyen auxiliaire en vue des hautes spéculations dont s'occupait leur génie, et ils n'avaient guère songé à retarder la construction de leur édifice par des considérations sur les matériaux et les appareils, de la solidité desquels ils étaient parfaitement convaincus. De là il est arrivé pour les déterminants, comme pour tous les instruments importants des mathématiques, qu'ils sont restés longtemps la possession d'un petit nombre d'esprits d'élite, avant qu'une théorie méthodique en rendît l'intelligence et l'usage abordables aux esprits ordinaires. Le premier qui ait eu l'idée de venir en aide à l'Algèbre par la formation des sommes combinatoires appelées aujourd'hui déterminants, ce fut l'illustre Leibniz, comme l'a remarqué Dirichlet.

Mais, sauf la lettre à l'Hospital du 28 avril 1693, où Leibniz parle avec conviction de la fécondité de son idée, on ne connaît aucun autre passage d'où l'on puisse conclure que Leibniz ait cherché à tirer de nouveaux fruits de cette découverte. La seconde invention des déterminants par Cramer, 1750, ne s'est pas perdue, à cause des services qu'elle a rendus aux progrès de l'Algèbre, grâce aux travaux de Cramer lui-même, et quelques années plus tard à ceux des Bezout, des Laplace, des Vandermonde, des Lagrange. C'est Vandermonde (*Sur l'élimination*, 1772) qui a cherché à créer un algorithme des déterminants, tandis que Lagrange, dans son Mémoire classique *Sur les pyramides*, 1773, faisait déjà un usage très-étendu des déterminants du troisième degré dans les problèmes de géométrie analytique. Mais ce qui a le plus contribué au perfectionnement et à l'extension du calcul au moyen des déterminants, ce sont les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, 1801. En partant de la considération des algorithmes qui se rapportent, dans cet ouvrage, aux « déterminants des formes quadratiques, » Binet et Cauchy, 1812, ont établi des règles générales, pour la multiplication des déterminants, et par là certains calculs sur des sommes difficiles à manier ont acquis une facilité inattendue. Jacobi, avec son génie créateur, s'empara en 1826 de ce nouveau calcul, dont jusque-là les développements étaient dus

surtout à Cauchy. Les travaux qu'il a publiés dans le *Journal de Crelle* sont des preuves éclatantes de la puissance de ce nouvel instrument dans la main d'un tel maître. C'est par les Mémoires de Jacobi *De formatione et proprietatibus determinantium* et *De determinantibus functionalibus,* 1841, que les déterminants sont devenus pour la première fois accessibles à tous les mathématiciens, et, depuis, leur théorie a reçu de divers côtés des accroissements importants.

Le Mémoire de Jacobi *De formatione*, *etc.*, qui n'a pas été rédigé pour l'usage immédiat de ceux qui commencent cette étude, et le traité de Spottiswoode intitulé : *Elementary theorems relating to determinants*, London, 1851, et dans lequel, à côté d'un ordre convenable des matières et d'un bon choix d'exemples, on rencontre un grand nombre de négligences et même d'erreurs qui diminuent la valeur de l'ouvrage : tels étaient lès seuls moyens que l'on eût pour arriver à la connaissance des déterminants, lorsque je me décidai à rassembler les matériaux, encore dispersés pour la plupart, pour en composer une théorie des déterminants, suivie de leurs plus importantes applications. Mon travail était presque terminé, lorsque j'ai eu connaissance de l'ouvrage de Brioschi, intitulé : *La teorica dei determinanti*, Pavia, 1854. Ce traité, appelé par le besoin généralement senti d'une introduction élémentaire à la connaissance des

déterminants, bien qu'il ne soit pas toujours rigoureux dans les principes, est cependant écrit avec une parfaite connaissance du sujet, et contient un riche trésor d'excellents matériaux. Aussi cet ouvrage s'est-il promptement répandu et fait apprécier. La traduction allemande de ce livre estimable, publiée tout récemment à Berlin, a été sans doute très-bien accueillie des mathématiciens d'Allemagne, et si j'ai eu le courage d'achever mon Traité sur le même sujet, cela tient principalement à ce qu'il diffère de celui de Brioschi par le plan et par l'exécution. Pour mettre à découvert dans sa plus grande simplicité le noyau théorique de cette doctrine, j'ai exposé les principales propriétés des déterminants et les algorithmes auxquels elles servent de base, dans un traité rédigé avec la rigueur synthétique, telle qu'on la rencontre dans les ouvrages des géomètres de l'antiquité, et lorsque cela m'a paru nécessaire, j'ai éclairci les principes par des exemples simples. Pour comprendre avec clarté les propositions d'un système, il ne peut être qu'avantageux d'avoir toujours présent, auprès de chaque théorème, l'ensemble des prémisses sur lesquelles il repose. Quant aux applications à l'Algèbre, à l'Analyse et à la Géométrie, je les ai réunies dans une section spéciale, pour en rendre l'intelligence plus facile en donnant aux sujets une plus grande liaison, et pour parvenir en même temps à

traiter chaque sujet plus complétement. Mais j'ai toujours cherché avec le plus grand soin à donner aux théorèmes et aux démonstrations toute la précision possible, partout où ils semblaient en manquer encore. Dans le choix des notations et des dénominations relatives à cette théorie, j'ai cru devoir user de la circonspection la plus minutieuse, parce que, sans cela, les nouvelles mathématiques menacent de devenir inintelligibles, à cause de l'extravagante profusion de termes nouveaux qui fait invasion dans leur vocabulaire. Je me suis particulièrement efforcé de donner quelque valeur à mon travail, en cherchant à remonter autant que possible aux sources originales, pour pouvoir citer les premiers inventeurs des méthodes et les premiers auteurs des théorèmes. De telles citations ne sont pas seulement un hommage que doit la postérité aux révélations du génie de nos prédécesseurs, elles constituent aussi un élément de l'histoire de la science, et invitent à l'étude des grandes œuvres qui ont servi à l'édifier, et où se trouvent encore de riches mines à exploiter. Je ne puis m'attendre, à la vérité, à ce que mes recherches m'aient partout conduit à de résultats exacts; mais j'espère qu'en publiant mes erreurs je fournirai l'occasion de les rectifier.

D'après ce que je viens de faire observer, il est im-

tile de relever ce qui a pu être ajouté par mes propres recherches aux matériaux fournis par les autres. Il ne me reste plus qu'à exprimer ma reconnaissance pour la bonté avec laquelle mon savant ami Borchardt m'a soutenu dans mon travail par les nombreux renseignements dont je lui suis redevable (*).

(*) Nous avons introduit, dans la présente édition, un certain nombre de corrections que l'Auteur a eu l'obligeance de nous indiquer. (*Note du Traducteur.*)

TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE DES DÉTERMINANTS.

APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE ET APPLICATIONS

DES

DÉTERMINANTS.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DES DÉTERMINANTS.

§ I. — *Partage des permutations d'éléments donnés en deux classes.*

1. Les éléments d'un arrangement dont on veut déduire les permutations se distinguent par leurs numéros d'ordre ou *indices*. Un élément est dit *plus élevé* qu'un autre, lorsqu'il a un indice plus grand. La combinaison d'un élément d'une permutation avec un des éléments suivants s'appelle, relativement à l'arrangement primitif, un *dérangement* (*) lorsque le premier élément de la combinaison est plus élevé que le second. Par exemple la permutation $a_2\, a_4\, a_3\, a_1$ contient quatre dérangements, $a_2\, a_1$, $a_4\, a_3$, $a_4\, a_1$, $a_3\, a_1$.

Les permutations d'éléments donnés ont été divisées par Cramer en deux classes, dont la première renferme les permutations où il se trouve un nombre *pair* de dérange-

(*) Cramer, *Analyse des lignes courbes*, 1750; Appendice, p. 658.

ments, et la seconde les permutations qui présentent un nombre *impair* de dérangements.

2. Théorème. — Lorsque dans une permutation on échange un élément avec un autre, tous les éléments restants conservant leurs places, le nombre des dérangements existants dans la permutation varie d'un nombre impair (*).

Démonstration. — Soient g et h les éléments que l'on veut échanger, h le plus élevé des deux, A le groupe des éléments qui précèdent g, B le groupe des éléments compris entre g et h, C le groupe des éléments qui suivent h. La permutation donnée étant ainsi

$$AgBhC,$$

et celle que l'on veut former étant

$$AhBgC,$$

la variation cherchée du nombre des dérangements provient de la position que g et h prennent l'un par rapport à l'autre, et par rapport aux éléments contenus dans B.

Soit β le nombre des éléments du groupe B, parmi lesquels il y en a β_1 plus élevés que g, et β_2 plus élevés que h. Alors, outre les dérangements qui existent dans B, il s'en trouvera, dans l'arrangement gBh, $\beta - \beta_1 + \beta_2$, parce que g est plus élevé que $\beta - \beta_1$ éléments de B, et qu'il y a, dans B, β_2 éléments plus élevés que h. Au lieu de ces

(*) La division des permutations fondée sur ce théorème est due à Bezout (*Histoire de l'Académie de Paris*, 1764, p. 292), et a été démontrée pour la première fois par Laplace dans la même collection, 1772, t. II, p. 294; elle l'a été ensuite plus simplement, de la manière que nous donnons ici, par Mollweide, *Demonstratio eliminationis Cramerianæ*, Leipzig, 1811, § 9, et par Gergonne, *Annales de Mathématiques*, t. IV, p. 150.

dérangements, l'arrangement hBg, formé par l'échange mutuel de g et de h, présentera $\beta - \beta_2 + 1 + \beta_1$ dérangements, puisque h est plus élevé que $\beta - \beta_2$ éléments de B, que de plus h est plus élevé que g, et qu'enfin il y a encore β_1 éléments de B qui sont plus élevés que g. La différence de ces nombres,

$$\beta - \beta_2 + 1 + \beta_1 - (\beta - \beta_1 + \beta_2) = 2\beta_1 - 2\beta_2 + 1,$$

est impaire. C. Q. F. D.

3. Par des échanges successifs de deux éléments, on peut obtenir l'une après l'autre toutes les permutations d'un arrangement donné. Les dérangements que l'on rencontrera dans cette suite de permutations seront alternativement en nombre pair et en nombre impair (2). Comme le nombre total des permutations est pair, il existera autant de permutations de la première classe, contenant un nombre pair de dérangements, que de permutations de la seconde classe, contenant un nombre impair de dérangements. Ces permutations se déduisent de l'arrangement donné, les premières au moyen d'un nombre pair, les secondes au moyen d'un nombre impair d'échanges entre deux éléments.

Deux permutations appartiennent à la même classe, si elles peuvent se déduire l'une de l'autre, ou se déduire toutes les deux d'une troisième, au moyen d'un nombre pair d'échanges entre des éléments pris deux à deux.

4. *Démonstration analytique du théorème* (2). — Pour classer les permutations, formons dans chacune d'elles les différences des indices correspondant aux éléments, en soustrayant l'indice de chaque élément de celui de l'élément suivant. Une permutation contiendra autant de dérangements qu'il y aura de ces différences qui seront négatives (1).

Le produit de ces différences est une fonction alternée des indices (*) *qui prend la valeur opposée par l'échange de deux de ces indices.*

Démonstration (**). — Chaque différence en particulier, dans l'échange de deux indices, conserve sa valeur absolue; le produit conserve donc aussi sa valeur absolue. Si l'on désigne par i et k deux indices déterminés, et par r et s deux autres indices quelconques; par

$$\Pi(r-i)(r-k),\quad \Pi(r-s),$$

les produits des facteurs dont les formules générales sont

$$(r-i)(r-k),\quad r-s;$$

si l'on désigne enfin par ε l'une des quantités $+1$ ou -1, le produit des différences à former pour une permutation donnée pourra se représenter par

$$\varepsilon(k-i)\,\Pi(r-i)(r-k)\,\Pi(r-s).$$

Si l'on échange maintenant i et k entre eux, les produits

$$\Pi(r-i)(r-k)\quad \text{et}\quad \Pi(r-s)$$

ne changeront pas, et $k-i$ prendra la valeur opposée. Donc le produit complet prendra la valeur opposée.

C. Q. F. D.

Puisque, par l'échange de deux éléments de la permutation, le produit en question change de signe, il s'ensuit que le nombre des différences négatives, et partant aussi le nombre des dérangements de la permutation, varient d'un nombre impair, comme on l'avait déjà démontré ci-dessus.

(*) Fonction alternée, suivant Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier, p. 30, et *Analyse algébrique*, t. III, p. 2). — *Functio alternans*, suivant Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XXII, p. 360).

(**) JACOBI, *Det.*, 2 (*Journal de Crelle*, t. XXII, n° 11).

5. L'échange des éléments d'un arrangement est appelé *permutation circulaire*, lorsque chaque élément est remplacé par le suivant, et le dernier élément par le premier.

Par une permutation circulaire de tous les éléments, on tire d'une permutation donnée une autre permutation qui appartient ou n'appartient pas à la même classe, suivant que le nombre des éléments est impair ou pair. Car la permutation circulaire de n éléments peut s'obtenir en échangeant le premier élément avec le second, puis avec le troisième, etc., ce qui fait ainsi $n-1$ échanges d'éléments deux à deux.

D'une permutation donnée on en peut déduire une autre quelconque par des permutations circulaires effectuées sur des groupes séparés d'éléments. Soient, par exemple,

$$7\ 2\ 5\ 4\ 3\ 8\ 1\ 6\ 9$$

les indices des éléments dans la permutation donnée, et

$$2\ 9\ 3\ 8\ 7\ 4\ 1\ 5\ 6$$

les indices des éléments dans la permutation à former. Commençons par le premier élément à déplacer dans la permutation donnée, et remplaçons successivement 7 par 2, 2 par 9, 9 par 6, 6 par 5, 5 par 3, et enfin 3 par l'élément 7 qui a servi de point de départ. On a ainsi séparé un groupe d'éléments sur lesquels on a accompli une permutation circulaire. Maintenant, dans la suite des éléments restants, remplaçons 4 par 8, 8 par 4, ce qui accomplit la permutation circulaire d'un second groupe d'éléments. L'élément 1 qui reste encore ne doit pas être remplacé par un autre. D'après cela, la seconde permutation a été déduite de la première par des permutations circulaires partielles.

En comptant pour un groupe particulier chacun des éléments qui, dans le procédé que nous venons de décrire

pour déduire une permutation d'une autre, doivent être remplacés respectivement par eux-mêmes, on a la règle suivante :

Deux permutations appartiennent ou n'appartiennent pas à la même classe, suivant que la différence entre leur nombre d'éléments et le nombre des groupes par la permutation circulaire desquels l'une des permutations données peut se déduire de l'autre, est paire ou impaire (*). En effet, si les permutations données sont composées de n éléments, et que la seconde se déduise de la première en partageant les éléments en p groupes de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ éléments, et en faisant subir à chaque groupe une permutation circulaire, ces permutations circulaires pourront s'effectuer au moyen de

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + (\alpha_3 - 1) + \ldots$$

échanges d'éléments deux à deux. Or on a

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = n;$$

donc la seconde permutation peut se déduire de la première au moyen de $n - p$ échanges d'éléments deux à deux.

Pour amener les éléments du premier groupe à leurs nouvelles places, il ne faut pas moins de $\alpha_1 - 1$ échanges d'éléments deux à deux, et ainsi de suite. Donc, pour déduire l'une de l'autre les permutations données, il ne faut pas moins de $n - p$ échanges d'éléments deux à deux. Dans l'exemple ci-dessus, on a $p = 3$, $n - p = 6$; par conséquent les permutations données appartiennent à la même classe.

(*) CAUCHY, *Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier, p. 42; *Analyse algébrique*, Note IV. — JACOBI, *Det.*, 3.

§ II. — *Déterminant d'un système de n^2 éléments.*

1. Si l'on considère m lignes horizontales de n éléments chacune, ou, sous un autre point de vue, n lignes verticales de m éléments chacune, pour distinguer en général ces éléments, il est commode de les affecter chacun de deux indices, dont le premier marque le rang de la ligne à laquelle appartient l'élément, et le second le rang de l'élément dans sa ligne (*); par exemple, on écrira

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \ldots & a_{m,n}. \end{matrix}$$

Au lieu de $a_{i,k}$, on écrit aussi $a_i^{(k)}$ ou simplement (i, k). Lorsque $m = n$, la série des éléments

$$a_{1,1} \quad a_{2,2} \ldots . \quad a_{n,n},$$

depuis le premier jusqu'au dernier, s'appelle la *diagonale* du carré des éléments.

2. On entend par *déterminant d'un système* de n^2 éléments, disposés sur n lignes de n éléments chacune, et représentés par $a_{i,k}$, i et k recevant chacun toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$, la somme des produits de ces éléments pris n à n, de manière qu'il n'y en ait pas deux dans le même produit qui appartiennent soit à la même ligne horizontale, soit à la même ligne verticale. Le premier terme

(*) Cette notation a été employée pour la première fois par Leibniz. *Voir* sa *Lettre à L'Hospital,* du 28 avril 1693, dans les *Œuvres mathématiques de Leibniz* publiées par GERHARDT, t. II, p. 239.

du déterminant est le produit des éléments de la diagonale,

$$a_{1,1}\ a_{2,2}\dots\ a_{n,n}.$$

Du premier terme on déduit tous les autres, en laissant les premiers indices invariables et permutant les seconds. On prend chaque terme positivement ou négativement, suivant que la permutation des indices qui a servi à le former appartient ou n'appartient pas à la même classe que le premier arrangement des indices.

Le déterminant de n^2 éléments est dit du $n^{ième}$ degré, parce que ses termes sont des produits de n éléments. Il est formé de $1.2\dots n$ termes, dont une moitié sont positifs et les autres négatifs (§ I, 3), et parmi lesquels il ne peut s'en trouver deux égaux et de signe contraire, tant qu'il n'existe pas de relations particulières entre les divers éléments. On désigne un déterminant, d'après Cauchy et Jacobi, en renfermant le système des éléments entre deux traits verticaux, ou en plaçant sous le signe sommatoire le premier terme précédé du double signe $\pm$; ou, d'après Vandermonde, en plaçant la série des premiers indices qui servent à distinguer les éléments, au-dessus de la série des seconds indices (*) :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1,1}\ a_{2,2}\dots\ a_{n,n} = \frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{\dots}{\dots}\Big|\frac{n}{n}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

(*) CAUCHY, *Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier, p. 52. — JACOBI, *Det.*, 4, et *Journal de Crelle*, t. XV, p. 115. — VANDERMONDE, *Histoire de l'Académie de Paris*, 1772, t. II, p. 517. Les déterminants ont été découverts par Leibniz (*loc. cit.*), qui a cherché à représenter par leur moyen la résultante de n équations linéaires à $n-1$ inconnues, ainsi que la résultante de deux équations algébriques quelconques à une inconnue. Comme second inventeur des déterminants, on doit nommer Cramer (*voir* § I, 1). La dé-

EXEMPLES :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1 b.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c.$$

$$\begin{matrix} b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix}\Bigg| = \left\{\begin{array}{l} ab_1c_2d_3 - ab_1c_3d_2 + ab_2c_3d_1 - ab_2c_1d_3 + ab_3c_1d_2 - ab_3c_2d_1 \\ - a_1bc_2d_3 + a_1bc_3d_2 + a_1b_2cd_3 - a_1b_2c_3d - a_1b_3cd_2 + a_1b_3c_2d \\ + a_2bc_1d_3 - a_2bc_3d_1 - a_2b_1cd_3 + a_2b_1c_3d + a_2b_3cd_1 - a_2b_3c_1d \\ - a_3bc_1d_2 + a_3bc_2d_1 + a_3b_1cd_2 - a_3b_1c_2d - a_3b_2cd_1 + a_3b_2c_1d. \end{array}\right.$$

3. Les termes d'un déterminant peuvent aussi se déduire du premier terme, en permutant les premiers indices et laissant invariables les rangs des seconds indices. Si l'on désigne, en effet, par $k_1\, k_2 \ldots k_n$ une permutation quelconque des indices $1\ 2 \ldots n$, alors $a_{1,k_1} a_{2,k_2} \ldots a_{n,k_n}$ exprimera un terme quelconque du déterminant. Or ce terme se déduit du premier terme $a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ soit en remplaçant les seconds indices $1, 2, \ldots, n$ respectivement par $k_1, k_2, \ldots, k_n$, soit encore en remplaçant, dans la série des premiers indices, k_1 par 1, k_2 par $2, \ldots,$ k_n par n. On a, dans les deux cas, à effectuer le même nombre d'échanges des indices deux à deux, et par suite le terme déduit par le second procédé obtient le même signe que par le premier procédé. Par exemple, de

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4}\, a_{5,5}\, a_{6,6},$$

---

nomination de *déterminant*, introduite par Cauchy, a été empruntée à des sommes formées d'après la loi ci-dessus, que Gauss (*Disquis. arith.*) a nommées *déterminants des formes quadratiques*. Depuis, Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, *Exercices d'Analyse*) a substitué au nom de *déterminant* celui de *fonction alternée*, et aussi l'expression de *résultante* employée par Laplace (*voir* § I, 2).

on déduit

$$a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}\, a_{4,4}\, a_{5,6}\, a_{6,5},$$

en remplaçant les seconds indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 par 3, 2, 1, 4, 6, 5. Mais le même terme peut aussi se tirer du premier terme, en remplaçant les premiers indices 3, 2, 1, 4, 6, 5 respectivement par 1, 2, 3, 4, 5, 6. Par le premier procédé comme par le second, il y a toujours quatre indices remplacés par d'autres, et dans les deux cas le terme déduit reçoit le même signe.

Deux systèmes dont l'un a pour lignes verticales les lignes horizontales de l'autre (et *vice versâ*),

$$\begin{array}{llll} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1}, \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{n,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n,n}, \end{array}$$

ont le même déterminant $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$. Car chaque terme de l'un des déterminants se trouve dans l'autre avec le même signe.

4. Théorème. — Un déterminant change de signe lorsque, dans le système de ses éléments, on échange une ligne (horizontale ou verticale) avec une ligne parallèle. Un déterminant s'évanouit identiquement lorsque les éléments d'une ligne sont égaux, chacun à chacun et dans le même ordre, aux éléments d'une ligne parallèle (*).

Démonstration. — Soient R le déterminant donné, R′ le déterminant qu'on en déduit par l'échange de deux lignes parallèles d'éléments ; R′ contiendra les mêmes termes que R avec des signes contraires. Car le premier terme de R′

(*) Laplace, *Histoire de l'Académie de Paris*, 1772, t. II, p. 297. — Vandermonde, *ibid.*, p. 518 et 522.

se déduit du premier terme de R par l'échange de deux des premiers ou de deux des seconds indices; il se trouve donc dans R avec le signe contraire. Tous les autres termes de R', qui se déduisent de son premier terme au moyen d'un nombre impair (ou pair) d'échanges de termes deux à deux, résulteront du premier terme de R au moyen d'un nombre pair (ou impair) de ces échanges. Donc tous les termes de R' se trouvent dans R avec le signe contraire, c'est-à-dire qu'on a $R' = -R$.

Si les éléments qui composent les deux lignes parallèles sont respectivement égaux dans le même ordre, alors, par l'échange de ces deux lignes, R se changera en $-R$: or le système des éléments n'est pas altéré par cet échange, et par suite $-R = R$; donc $R = 0$, quelles que soient les valeurs des éléments.

Par exemple, on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \ldots & a_{1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,2} \, a_{1,1} \, a_{1,3} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,2} \, a_{2,1} \, a_{2,3} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,2} \, a_{n,1} \, a_{n,3} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} & a_{2,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} & a_{n,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,2} \ldots & a_{2,n} & a_{2,1} \\ a_{3,2} \ldots & a_{3,n} & a_{3,1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2} \ldots & a_{n,n} & a_{n,1} \\ a_{1,2} \ldots & a_{1,n} & a_{1,1} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

En général, si $i, k, l, \ldots,$ ainsi que $r, s, t, \ldots,$ désignent

des permutations données de 1, 2, ..., n, on a

$$\begin{vmatrix} a_{i,r} & a_{i,s} & a_{i,t} & \cdots \\ a_{k,r} & a_{k,s} & a_{k,t} & \cdots \\ a_{l,r} & a_{l,s} & a_{l,t} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdots \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdots \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

ε désignant l'unité positive ou négative, suivant que les permutations données appartiennent ou non à la même classe.

5. Théorème. — Si les éléments d'une certaine ligne du système s'évanouissent tous à l'exception d'un seul, le déterminant du système donné se réduit au produit de l'élément en question par un déterminant d'un degré moindre d'une unité (*).

Démonstration. — Soit

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et supposons que parmi les éléments

$$a_{i,1}\ a_{i,2} \ldots\ a_{i,n},$$

$a_{i,k}$ soit le seul différent de zéro. Prenons, dans le système donné, la $i^{ième}$ ligne horizontale d'éléments pour en faire la première ligne horizontale, et la $k^{ième}$ ligne verticale pour en faire la première ligne verticale, de sorte que, par $(i-1)+(k-1)$ changements de signe (4), R se change

(*) Jacobi, *Det.*, 5.

en

$$\varepsilon R = \begin{vmatrix} a_{i,k} & a_{i,1} \ldots a_{i,k-1} & a_{i,k+1} \ldots a_{i,n} \\ a_{1,k} & a_{1,1} \ldots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \ldots a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} \ldots & \ldots \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,k} & a_{n,1} \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

où $\varepsilon = (-1)^{i+k}$. Par hypothèse, les termes de εR dans lesquels le premier des seconds indices est différent de k, s'évanouissent. Donc εR se réduit aux termes qui se déduisent du terme principal

$$a_{i,k}\, a_{1,1} \ldots a_{n,n}$$

par la permutation des seconds indices $1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, à l'exclusion de k; c'est-à-dire, aux termes d'un déterminant de degré $n-1$ (2), multipliés par le facteur $a_{i,k}$. Ainsi

$$\varepsilon R = a_{i,k} \begin{vmatrix} a_{1,1} \ldots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \ldots a_{1,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} \ldots & \ldots \\ a_{i+1,1} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1} \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

ε ayant la signification indiquée ci-dessus.

Exemples :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{vmatrix} = -d_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}.$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6. Il s'ensuit réciproquement que tout déterminant peut être mis sous la forme d'un déterminant d'un degré plus élevé. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,n} \\ 0 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,1} & \ldots & a_{n+2,n} \\ 0 & 1 & a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,n} \\ 0 & 0 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite. Les éléments

$$\begin{array}{lll} a_{n+1,1}, \ldots, & a_{n+1,n}, & \\ a_{n+2,1}, \ldots, & a_{n+2,n}, & a_{n+2,n+1}, \end{array}$$

qui ne se trouvaient pas dans le développement du déterminant primitif, pourront recevoir des valeurs arbitraires quelconques, et par conséquent on pourra aussi les supposer nuls.

7. Lorsque tous les éléments situés d'un même côté de la diagonale s'évanouissent, le déterminant du système se réduit à son terme principal.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \text{etc.} \ldots \quad [5]$$

$$= a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

§ III. — *Des termes d'un déterminant ordonné suivant les éléments d'une même ligne.*

1. Théorème. — En désignant par i et k deux indices quelconques de la suite $1, 2, \ldots, n$; par R le déterminant $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$; par $\alpha_{i,k}$ le coefficient de $a_{i,k}$ dans R, c'est-à-dire par $a_{i,k}\, \alpha_{i,k}$ la somme des termes de R qui renferment l'élément $a_{i,k}$: les sommes

$$a_{i,1} \alpha_{k,1} + a_{i,2} \alpha_{k,2} + \ldots + a_{i,n} \alpha_{k,n},$$
$$a_{1,i} \alpha_{1,k} + a_{2,i} \alpha_{2,k} + \ldots + a_{n,i} \alpha_{n,k},$$

auront pour valeur R ou zéro, suivant que i et k seront égaux ou inégaux (*).

Démonstration. — Chaque terme de R contient l'un quelconque des éléments

$$a_{i,1}, \quad a_{i,2}, \ldots, \quad a_{i,n},$$

qui forment la $i^{\text{ième}}$ ligne horizontale, et n'en contient qu'un. Par hypothèse, $a_{i,1}\, \alpha_{i,1}$ est la somme des termes de R où se trouve l'élément $a_{i,1}$, et ainsi de suite. Donc

$$R = a_{i,1} \alpha_{i,1} + a_{i,2} \alpha_{i,2} + \ldots + a_{i,n} \alpha_{i,n}.$$

On trouve de la même manière l'identité

$$R = a_{1,i} \alpha_{1,i} + a_{2,i} \alpha_{2,i} + \ldots + a_{n,i} \alpha_{n,i}.$$

Si l'on y fait

$$a_{i,1} = a_{k,1}, \quad a_{i,2} = a_{k,2}, \ldots,$$

ou bien

$$a_{1,i} = a_{1,k}, \quad a_{2,i} = a_{2,k}, \ldots,$$

(*) Cramer, *loc. cit.* — Cauchy, *loc. cit.*, p. 66. — Jacobi, *Det.*, 6. Les identités qui résultent de ce théorème pour le cas de $n=3$, se trouvent dans Lagrange, *Sur les Pyramides*, 7 (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773).

on obtient des sommes qui équivalent aux déterminants de systèmes où les éléments d'une ligne sont respectivement égaux aux éléments d'une ligne parallèle. Or ces déterminants s'évanouissent identiquement (§ II, 4).

2. Pour multiplier un déterminant par un facteur, on multiplie par ce facteur tous les éléments d'une même ligne. Réciproquement, on peut placer devant le déterminant lui-même tout facteur commun aux éléments d'une même ligne. Ainsi



$$p\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & b & c \\ pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & pb & pc \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

C'est ce qu'on rend évident, en mettant le déterminant sous la forme $a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, ou sous la forme $a\alpha + b\beta + c\gamma$. On a encore

$$-\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b \\ -a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b_1 & c_1 \\ a & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c_1 \\ a & b & c_2 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Si tous les éléments d'une même ligne sont composés chacun de m termes, alors le déterminant peut se décomposer en une somme de m déterminants. Si l'on suppose

$$a_{i,1} = p_1 + q_1 + r_1 + \ldots,$$
$$a_{i,2} = p_2 + q_2 + r_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} &= a_{i,1}\,\alpha_{i,1} + a_{i,2}\,\alpha_{i,2} + \ldots + a_{i,n}\,\alpha_{i,n} \\
&= p_1\ \ \alpha_{i,1} + p_2\ \ \alpha_{i,2} + \ldots + p_n\ \ \alpha_{i,n} \\
&+ q_1\ \ \alpha_{i,1} + q_2\ \ \alpha_{i,2} + \ldots + q_n\ \ \alpha_{i,n} \\
&+ r_1\ \ \alpha_{i,1} + r_2\ \ \alpha_{i,2} + \ldots + r_n\ \ \alpha_{i,n} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Les divers déterminants dans lesquels R se décompose, sont formés de R en y remplaçant les éléments

$$a_{i,1},\quad a_{i,2},\ldots,\quad a_{i,n},$$

par leurs parties respectives

$$
\begin{array}{llll}
p_1, & p_2,\ldots, & p_n, & \\
q_1, & q_2,\ldots, & q_n, & \\
r_1, & r_2,\ldots, & r_n, & \text{etc.}
\end{array}
$$

On a, par exemple,

$$
\begin{vmatrix} a+a', & a_1, & a_2 \\ b+b', & b_1, & b_2 \\ c+c', & c_1, & c_2 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} a' & a_1 & a_2 \\ b' & b_1 & b_2 \\ c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.
$$

4. La valeur d'un déterminant n'est pas altérée, lorsqu'on ajoute aux éléments d'une même ligne respectivement les éléments d'une ligne parallèle, multipliés par un facteur commun (*) : ainsi

$$
\begin{vmatrix} a+b\,p, & b, & c \\ a+b_1p, & b_1, & c_1 \\ a+b_2p, & b_2, & c_2 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}
+ p \begin{vmatrix} b & b & c \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},
$$

(*voir* 3 et 2), et le second déterminant est identiquement nul dans cette expression (§ II, 4).

(*) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XXII, p. 371.

EXEMPLES :

$$\begin{vmatrix} 1, & x-a, & y-b \\ 1, & x_1-a, & y_1-b \\ 1, & x_2-a, & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} x-a, & y-b \\ x_1-a, & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & a-a, & b-b \\ 1, & x-a, & y-b \\ 1, & x_1-a, & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad (\S\text{II}, 6).$$

5. ***Détermination du coefficient $\alpha_{i,k}$ qui multiplie l'élément $a_{i,k}$ dans le déterminant*** R. — Pour ne conserver que les termes de R qui renferment $a_{i,k}$, supposons nuls tous les éléments d'une des lignes qui contiennent $a_{i,k}$, à l'exception de $a_{i,k}$ lui-même. Substituons ensuite l'unité à la place de $a_{i,k}$, et nous trouverons le coefficient cherché,

$$\alpha_{i,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

expression qui peut se mettre sous la forme d'un déterminant du degré $n-1$ (§ II, 5). Si l'on prend la $i^{ième}$ ligne horizontale pour première ligne horizontale, et la $k^{ième}$ ligne verticale pour première ligne verticale, il se produit alors $(i-1)+(k-1)$ changements de signe dans $\alpha_{i,k}$ (§ II, 4), et l'on a par conséquent

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i+1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Par un procédé analogue, on déduit de R le coefficient qui multiplie dans R le produit $a_{i,k}\, a_{r,s}$, en remplaçant $a_{i,k}$ et $a_{r,s}$ par l'unité, et mettant zéro à la place de tous les autres éléments contenus dans les lignes qui se coupent en $a_{i,k}$ et en $a_{r,s}$. Ce coefficient se réduit à un déterminant du degré $n - 2$; et ainsi de suite.

6. *Détermination de $\alpha_{i,k}$ par les permutations circulaires.* — Pour déduire de R un autre déterminant, égal en valeur absolue, et dont le premier élément soit $a_{i,k}$, en se servant de permutations circulaires, il suffit d'effectuer successivement $i - 1$ permutations circulaires des lignes horizontales, et $k - 1$ permutations circulaires des lignes verticales, ce qui introduit

$$(i - 1 + k - 1)(n - 1)$$

changements de signe (§ I, 5). On a par conséquent (5)

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{(n-1)(i+k)} \begin{vmatrix} a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,k+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,k+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,k+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Dans les déterminants de *degré impair*, les coefficients $\alpha_{i,k}$ peuvent se déduire de $\alpha_{1,1}$ par des permutations circulaires, *sans changement de signe*. On a, d'après cela, pour la formation des déterminants par voie récurrente,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

et

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

7. *Détermination de $\alpha_{i,k}$ par la différentiation.* — Si les éléments d'un système sont indépendants les uns des autres, il suffit, pour différentier R par rapport à $a_{i,k}$, de considérer seulement la somme $a_{i,k}\,\alpha_{i,k}$. Or $\alpha_{i,k}$ est indépendant de $a_{i,k}$; par conséquent

$$\frac{d\mathrm{R}}{da_{i,k}} = \alpha_{i,k} \text{ (*)}.$$

Le coefficient de $a_{i,k}$ dans R peut donc s'exprimer par le quotient différentiel partiel

$$\frac{d\mathrm{R}}{da_{i,k}}.$$

Le coefficient de $a_{i,k}\,a_{r,s}$ dans R entre dans $\alpha_{i,k}$ comme coefficient de $a_{r,s}$, et peut en conséquence s'exprimer en différentiant $\alpha_{i,k}$ par rapport à $a_{r,s}$, ce qui donne

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{da_{i,k}\,da_{r,s}} \text{ (**)}.$$

De ce coefficient on peut déduire celui de $a_{r,k}\,a_{i,s}$ dans R, en échangeant entre eux les premiers indices i et r, c'est-à-dire en échangeant la $i^{ième}$ ligne horizontale du système donné avec la $r^{ième}$. Par là, R subit un changement de

(*) JACOBI, *Det.*, 6.

(**) JACOBI, *Det.*, 10.

signe ; on a donc, pour le coefficient cherché,

$$\frac{d^2 R}{da_{r,k}\, da_{i,s}} = -\frac{d^2 R}{da_{i,k}\, da_{r,s}}.$$

On déterminera d'une manière analogue le coefficient de $a_{i,k}\, a_{r,s}\, a_{u,v}$ dans R. On trouve en même temps des relations entre les troisièmes dérivées partielles de R. Et ainsi de suite.

8. Si les éléments du système, qui portent les mêmes indices dans l'ordre inverse, tels que $a_{i,k}$ et $a_{k,i}$, dépendent l'un de l'autre, il en est de même aussi des déterminants de degré m,

$$P = \begin{vmatrix} a_{i,r} & a_{i,s} & a_{i,t} \dots \\ a_{k,r} & a_{k,s} & a_{k,t} \dots \\ a_{l,r} & a_{l,s} & a_{l,t} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} \dots \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} \dots \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

dont l'un se forme au moyen de l'autre en permutant la suite des premiers indices avec celle des seconds.

I. Si, en particulier, $a_{k,i} = a_{i,k}$, alors on a $Q = P$, car

$$P = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{s,i} & a_{t,i} \dots \\ a_{r,k} & a_{s,k} & a_{t,k} \dots \\ a_{r,l} & a_{s,l} & a_{t,l} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} \dots \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} \dots \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (\S\ \text{II}, 3)$$

II. Si l'on a $a_{k,i} = -a_{i,k}$, $a_{i,i} = 0$, alors $Q = (-1)^m P$. En effet, en multipliant chaque ligne verticale de P par -1, et par suite (2) P par $(-1)^m$, il vient

$$(-1)^m P = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{s,i} & a_{t,i} \dots \\ a_{r,k} & a_{s,k} & a_{t,k} \dots \\ a_{r,l} & a_{s,l} & a_{t,l} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} \dots \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} \dots \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (\S\ \text{II}, 3).$$

Si la suite des indices $r, s, t, \ldots$ est une permutation des indices $i, k, l, \ldots$ et que m soit impair, alors Q est, non-seulement $= -P$, mais aussi $= +P$ (§ II, 4), et, par suite, le déterminant est identiquement nul.

9. Théorème. — En désignant, comme ci-dessus, par R le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

et par $\alpha_{i,k}$ le coefficient de $a_{i,k}$ dans R, on a, dans l'hypothèse de $a_{k,i} = a_{i,k}$,

$$\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} = \frac{1}{2}\frac{dR}{da_{i,k}} \ (^*),$$

$$\alpha_{i,i} = \frac{dR}{da_{i,i}}.$$

Au contraire, on a, dans l'hypothèse de $a_{k,i} = -a_{i,k}$ et de $a_{i,i} = 0$,

$$R = (-1)^n R, \quad \alpha_{i,k} = (-1)^{n-1}\alpha_{k,i},$$

et par suite, pour n pair,

$$\alpha_{i,k} = -\alpha_{k,i} = \frac{1}{2}\frac{dR}{da_{i,k}},$$

$$\alpha_{i,i} = 0,$$

et pour n impair,

$$R = 0 \ (^{**}), \quad \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}.$$

Démonstration. — Les propositions énoncées relativement à R et à $\alpha_{i,k}$ résultent des propriétés de P et de Q trouvées dans l'article précédent (*voir* 6). On a de plus,

(*) Jacobi, *Journal de Crelle*, t. XII, p. 20.

(**) Jacobi, *Journal de Crelle*, t. II, p. 354.

en vertu de la dépendance entre les éléments correspondants $a_{i,k}$ et $a_{k,i}$ (7),

$$\frac{dR}{da_{i,k}} = \alpha_{i,k} + \alpha_{k,i}\frac{da_{k,i}}{da_{i,k}}.$$

Mais, d'après la première hypothèse, on a

$$\frac{da_{k,i}}{da_{i,k}} = 1, \quad \alpha_{k,i} = \alpha_{i,k},$$

et par suite

$$\frac{dR}{da_{i,k}} = 2\alpha_{i,k}.$$

En vertu de la seconde hypothèse, on a

$$\frac{da_{k,i}}{da_{i,k}} = -1,$$

et par suite (7)

$$\frac{dR}{da_{i,k}} = \alpha_{i,k} - \alpha_{k,i}.$$

Pour n pair, $-\alpha_{k,i} = \alpha_{i,k}$; par conséquent

$$\frac{dR}{da_{i,k}} = 2\alpha_{i,k}.$$

Pour n impair, $\frac{dR}{da_{i,k}}$ s'évanouit identiquement, comme R lui-même, et l'équation

$$\frac{dR}{da_{i,k}} = \alpha_{i,k} - \alpha_{k,i}$$

donne le résultat déjà obtenu, $\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$.

10. *Différentielle d'un déterminant.* — Si tous les éléments du système doivent être considérés comme des variables indépendantes, alors, en vertu de l'équation (7)

$$\frac{dR}{da_{i,k}} = \alpha_{i,k},$$

on a, pour la différentielle complète,

$$dR = \sum_{i,k} \alpha_{i,k}\, da_{i,k}\ (^*),$$

les termes de cette somme se déduisant de $\alpha_{i,k}\, da_{i,k}$, en remplaçant i et k successivement par tous les indices depuis 1 jusqu'à n.

Soient, par exemple, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des fonctions de x; désignons le $k^{ième}$ quotient différentiel de y_i par $y_{i,k}$; formons le déterminant

$$R_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & \ldots y_{n,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & \ldots\ y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

et désignons par $\eta_{i,k}$ le coefficient de $y_{i,k}$ dans R_n. On a, d'après la formule que nous venons d'établir,

$$\frac{dR_n}{dx} = \sum_{i,k} \eta_{i,k} \frac{dy_{i,k}}{dx} = \sum_{i,k} \eta_{i,k}\, y_{i,k+1}.$$

La somme (1)

$$\eta_{1,k}\, y_{1,k+1} + \eta_{2,k}\, y_{2,k+1} + \ldots + \eta_{n,k}\, y_{n,k+1}$$

s'annule pour toute valeur de k inférieure à $n-1$; il reste, par conséquent,

$$\frac{dR_n}{dx} = \sum_i \eta_{i,n-1}\, y_{i,n}\ (^{**}).$$

11. Théorème. — Si l'on a $R = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ et

(*) Jacobi, *Det.*, 6.

(**) Abel, *Journal de Crelle*, t. II, p. 22. — Malmstén, *Journal de Crelle*, t. XXXIX, p. 91.

que $\alpha_{i,k}$ désigne le coefficient de $a_{i,k}$ dans R; si de plus $B = \Sigma \pm b_{1,1}\, b_{2,2} \ldots\, b_{n-1,n-1}$, et que $\beta_{i,k}$ soit le coefficient de l'élément $b_{i,k}$ dans B; si enfin on forme au moyen de B de nouveaux déterminants B_i, en remplaçant les éléments de la première ligne verticale $b_{1,1}, b_{2,1}, \ldots, b_{n-1,1}$ par les éléments $a_{1,i}, a_{2,i}, \ldots, a_{n-1,i}$, on aura identiquement

$$\alpha_{n,1} B_1 + \alpha_{n,2} B_2 + \ldots + \alpha_{n,n} B_n = 0\ (*).$$

Démonstration. — D'après (1), on a les identités

$$\begin{array}{l} \alpha_{n,1} a_{1,1} + \alpha_{n,2} a_{1,2} + \ldots + \alpha_{n,n} a_{1,n} = 0, \\ \alpha_{n,1} a_{2,1} + \alpha_{n,2} a_{2,2} + \ldots + \alpha_{n,n} a_{2,n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n,1} a_{n-1,1} + \alpha_{n,2} a_{n-1,2} + \ldots + \alpha_{n,n} a_{n-1,n} = 0. \end{array}$$

En multipliant ces équations respectivement par les quantités

$$\beta_{1,1},\ \beta_{2,1}, \ldots,\ \beta_{n-1,1},$$

et faisant la somme des équations ainsi obtenues, la quantité $\alpha_{n,i}$ aura pour coefficient, dans cette somme, l'expression

$$B_i = a_{1,i}\, \beta_{1,1} + a_{2,i}\, \beta_{2,1} + \ldots + a_{n-1,i}\, \beta_{n-1,1},$$

qui se déduit du déterminant

$$B = b_{1,1}\, \beta_{1,1} + b_{2,1}\, \beta_{2,1} + \ldots + b_{n-1,1}\, \beta_{n-1,1},$$

en remplaçant les éléments $b_{1,1}, b_{2,1}, \ldots, b_{n-1,1}$ par les éléments $a_{1,i}, a_{2,i}, \ldots, a_{n-1,i}$.

(*) Bezout (*Équations algébriques*, 1779, § 220) a indiqué les cas les plus simples de cette identité.

Exemples. — En écrivant, pour abréger,

$$(ab),\qquad (abc),\qquad (abcd),\ldots,$$

au lieu de

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix},\ldots,$$

on a

$$(bc)(ad)+(ca)(bd)+(ab)(cd)=0\ (*),$$
$$(bcd)(aef)-(cda)(bef)+(dab)(cef)-(abc)(def)=0,$$
$$(bcde)(afgh)+(cdea)(bfgh)+(deab)(cfgh)$$
$$+(eabc)(dfgh)+(abcd)(efgh)=0,\text{ etc.}\ldots$$

Remarque. — Les propositions géométriques correspondantes (*voir* ci-dessous, § XVI) ont été établies par Monge, 1809 (*Journal de l'École Polytechnique*, XV[e] cahier, p. 68), et, depuis, par Mœbius (*Baryc. calc.*, §§ 166 et 171). Le théorème précédent est contenu dans la décomposition générale du produit de deux déterminants, que Sylvester a donnée (*Philos. Mag.*, 1851, t. II, p. 142; compar. 1852, t. II, p. 342), et dont Faà de Bruno (*Journal de Liouville*, t. XVII, p. 190) a publié une démonstration très-simple.

§ IV. — *Décomposition d'un déterminant en une somme de produits de déterminants partiels.*

1. Théorème. — Partageons les lignes horizontales d'un système donné de n^2 éléments en groupes, dont le premier

(*) Cette identité se trouve déjà, d'après l'indication de Vandermonde (*loc. cit.*, p. 527), dans les *Mémoires* publiés par Fontaine, 1764 (au commencement de sa *Seconde méthode* du calcul intégral, p. 90).

contienne les α premières lignes horizontales, le deuxième les β suivantes, le troisième les γ suivantes; et ainsi de suite, de sorte qu'on ait $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$;

Formons, avec une combinaison quelconque de α lignes verticales du premier groupe (rangées suivant l'ordre ascendant), le déterminant A de degré α;

Parmi les lignes verticales du second groupe, laissons de côté les prolongements des lignes verticales qui entrent dans A, et avec une combinaison quelconque de β des lignes verticales restantes, formons le déterminant B de degré β;

Parmi les lignes verticales du troisième groupe, laissons de côté les prolongements des lignes verticales qui entrent dans A et dans B, et formons, avec une combinaison quelconque de γ des lignes verticales restantes, le déterminant C de degré γ; et ainsi de suite;

Parmi les lignes verticales du dernier groupe, laissons de côté les prolongements des lignes verticales qui entrent dans A, B, C, ..., et formons, avec les lignes verticales restantes, un déterminant de degré $n - \alpha - \beta - \gamma \ldots$. En formant le produit ABC... de toutes les manières possibles, et donnant aux divers produits le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la série de tous les seconds indices est une permutation des seconds indices donnés appartenant à la première ou à la seconde classe; la somme de ces produits est égale au déterminant donné (*).

Démonstration. — Un produit tel que ABC... renferme ceux des termes du déterminant qui se déduisent du terme principal

$$a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\, a_{n,n},$$

en laissant invariables les premiers indices, et partageant au contraire les seconds indices en groupes (rangés suivant

(*) Jacobi, *Det.*, 8, d'après Laplace, *loc. cit.*, p. 294.

l'ordre ascendant) de α, β, γ,... indices, et permutant les indices dans chacun de ces groupes. Si l'on effectue le groupement de toutes les manières possibles, et que l'on permute chaque fois les indices dans les divers groupes, on obtient toutes les permutations des seconds indices donnés. La somme de tous les produits ABC... comprend par conséquent tous les termes du déterminant donné.

Le déterminant A peut être composé de

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1\,.\,2\quad\ldots\quad\alpha}$$

manières différentes, puisque c'est là le nombre des combinaisons de n indices pris α à α. Pour chaque déterminant A, on peut former $\binom{n-\alpha}{\beta}$ déterminants B différents, puisque c'est là le nombre des combinaisons β à β des $n-\alpha$ indices restants. Pour chaque produit AB, on peut former $\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ déterminants C différents, et ainsi de suite. Par conséquent, on peut en général former

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\ldots = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma\ldots}$$

produits ABC..., dont la somme compose le déterminant donné. On retrouve, en effet, le nombre des termes du déterminant $(1.2\ldots n)$, en multipliant le nombre des produits ABC... par le nombre des termes d'un tel produit $(1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma\ldots)$.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a_3 \\ b & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c_3 \\ d & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c_2 \\ d & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c_1 \\ d & d_1 \end{vmatrix}.$$

La décomposition d'un déterminant du $n^{ième}$ degré en une somme de produits formés chacun d'un déterminant du 2e degré et d'un déterminant du $(n-2)^{ième}$ degré se trouve traitée avec développement par Jacobi (*Det.*, 9 et 10).

2. Lorsque les éléments du système donné, qui ont i lignes verticales et $n-i$ lignes horizontales communes, s'annulent, le déterminant se réduit au produit d'un déterminant de degré i par un déterminant de degré $n-i$ (*)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots & a_{1,i} & a_{1,i+1}\ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1}\ldots & a_{i,i} & a_{i,i+1}\ldots & a_{i,n} \\ 0\ \ldots & 0 & a_{i+1,i+1}\ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ \ldots & 0 & a_{n,i+1}\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots & a_{1,i} \\ \ldots & \ldots \\ a_{i,1}\ldots & a_{i,i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i+1,i+1}\ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,i+1}\ \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Si l'on partage en effet le déterminant donné en une somme de produits de déterminants du $i^{ième}$ et du $(n-i)^{ième}$ degré, en réunissant dans un même groupe les $n-i$ lignes horizontales désignées dans l'hypothèse, et dans un autre groupe les i lignes horizontales restantes, parmi les déterminants de degré $n-i$ que l'on aura à former, un seul sera différent de zéro.

3. Si l'on désigne en général par

$$\begin{matrix} f, & g, \ldots, & r, & s, \ldots, \\ i, & k, \ldots, & u, & v, \ldots, \end{matrix}$$

deux permutations de $1, 2, \ldots, n$; $f, g, \ldots$ et $i, k, \ldots$ étant des groupes de m indices, tandis que $r, s, \ldots$ et $u, v, \ldots$ désignent les $n-m$ indices restants; le déterminant de de-

(*) JACOBI, *Det.*, 5.

gré m

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} \ldots \\ a_{g,i} & a_{g,k} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

s'appelle un $(n-m)^{\text{ième}}$ *déterminant partiel*, par rapport au déterminant de degré n,

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \; (*).$$

Le coefficient de ce déterminant partiel dans R peut se trouver en remarquant que l'on a

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} \ldots & a_{f,u} & a_{f,v} \ldots \\ a_{g,i} & a_{g,k} \ldots & a_{g,u} & a_{g,v} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r,i} & a_{r,k} \ldots & a_{r,u} & a_{r,v} \ldots \\ a_{s,i} & a_{s,k} \ldots & a_{s,u} & a_{s,v} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \varepsilon R,$$

ε désignant l'unité positive ou négative, selon que les permutations données appartiennent ou n'appartiennent pas à la même classe (§ II, 4). En décomposant ε R en produits de déterminants de degré m et de degré $n-m$, on obtient, pour le coefficient du déterminant partiel

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} \ldots \\ a_{g,i} & a_{g,k} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

(*) D'après la dénomination adoptée par Jacobi, *Journal de Crelle*, t. XXVII, p. 206, et t. XXX, p. 136. Comparez avec les *systèmes dérivés* de Cauchy, *loc. cit.*, p. 96.

dans ε R, le déterminant partiel

$$\begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} \dots \\ a_{s,u} & a_{s,v} \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Le coefficient cherché est donc, ε ayant la même signification que ci-dessus,

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} \dots \\ a_{s,u} & a_{s,v} \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix},$$

expression qui coïncide avec le coefficient du produit $a_{f,i}\, a_{g,k} \dots$, dans R (§ III, 7),

$$\frac{d^m \mathrm{R}}{da_{f,i}\, da_{g,k} \dots}.$$

4. Le développement du déterminant

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{1,1}+z & a_{1,2} \dots\dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+z \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots\dots & a_{n,n}+z \end{vmatrix}$$

suivant les puissances de z donne

$$\mathrm{R}_n + z \sum \mathrm{R}_{n-1} + z^2 \sum \mathrm{R}_{n-2} + \dots + z^{n-1} \sum \mathrm{R}_1 + z^n,$$

l'expression

$$\mathrm{R}_m = \begin{vmatrix} a_{i,i} & a_{i,k} \dots \\ a_{k,i} & a_{k,k} \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

étant un déterminant partiel du degré m, dont la diagonale est formée d'éléments appartenant à la diagonale de R_n, et $\Sigma\, \mathrm{R}_m$ désignant la somme des déterminants qui se déduisent de R_m en remplaçant les indices i, k, ..., par toutes

les combinaisons différentes des nombres 1, 2,..., n, pris m à m (*).

Démonstration. — On aperçoit immédiatement que le premier terme R_n coïncide avec f (o), et que le dernier terme est bien z^n. Les termes du développement qui contiennent z^m résultent des termes du déterminant $f(z)$ dans lesquels il entre m éléments quelconques de la diagonale. En désignant maintenant par i, k,... une combinaison quelconque (rangée suivant l'ordre ascendant) de m indices de la suite 1, 2,..., n, et par r, s,... les indices restants, on a (§ II, 4)

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{i,i}+z & a_{i,k}\ldots\ldots & a_{i,r} & a_{i,s}\ldots\ldots \\ a_{k,i} & a_{k,k}+z\ldots & a_{k,r} & a_{k,s}\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r,i} & a_{r,k}\ldots\ldots & a_{r,r}+z & a_{r,s}\ldots\ldots \\ a_{s,i} & a_{s,k}\ldots\ldots & a_{s,r} & a_{s,s}+z\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

$f(z)$ étant mis sous cette forme, on reconnaît, par le théorème 1, que le développement du produit

$$\begin{vmatrix} a_{i,i}+z & a_{i,k}\ldots\ldots \\ a_{k,i} & a_{k,k}+z\ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{r,r}+z & a_{r,s}\ldots\ldots \\ a_{s,r} & a_{s,s}+z\ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

forme une partie du développement cherché du déterminant $f(z)$. Le développement du premier facteur suivant les puissances de z se termine par z^m, celui du second facteur commence par

$$\begin{vmatrix} a_{r,r} & a_{r,s}\ldots \\ a_{s,r} & a_{s,s}\ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

(*) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XII, p. 15.

Par conséquent

$$z^m \begin{vmatrix} a_{r,r} & a_{r,s} \dots \\ a_{s,r} & a_{s,s} \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

est la forme générale d'un des termes du développement cherché, qui contiennent z^m. En remplaçant les indices $i, k, \dots$ par toutes les combinaisons possibles m à m des nombres de la suite $1, 2, \dots, n$, et par suite $r, s, \dots$ par toutes les combinaisons possibles $n - m$ à $n - m$ des mêmes nombres, on obtiendra tous les termes de $f(z)$ qui contiennent z^m en facteur.

§ V. — *Des déterminants ordonnés suivant les produits des éléments de deux lignes qui se coupent.*

1. Théorème. — En désignant par R le déterminant $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n}$, par R' le coefficient de l'élément $a_{r,s}$ dans R, et par $\alpha_{i,k}$ le coefficient de l'élément $a_{i,k}$ dans R', on a

$$R = a_{r,s} R' - \sum_{i,k} a_{r,k}\, a_{i,s}\, \alpha_{i,k}.$$

On obtient les différents termes de la somme en faisant (*)

$$i = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n,$$
$$k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n.$$

Démonstration. — Les termes du déterminant R contiennent ou bien l'élément $a_{r,s}$, ou bien le produit de deux éléments appartenant aux lignes qui se coupent suivant $a_{r,s}$, par exemple, le produit $a_{r,k}\, a_{i,s}$, k désignant un indice quelconque différent de s, et i un indice différent de r. La

(*) Cauchy a donné un cas particulier de cette formule (*Journal de l'École Polytechnique*, XVII[e] cahier, p. 69).

somme des termes de R qui contiennent $a_{r,s}$ est par hypothèse $a_{r,s}\,R'$. Le coefficient du produit $a_{r,k}\,a_{i,s}$ dans R est d'ailleurs égal et de signe contraire au coefficient de $a_{r,s}\,a_{i,k}$ dans R (§ III, 7), et par conséquent égal et de signe contraire au coefficient de $a_{i,k}$ dans R'. Donc $-\alpha_{i,k}$ est le coefficient de $a_{r,k}\,a_{i,s}$ dans R.

Corollaire. — D'après les notations précédentes, le coefficient de l'élément $a_{r,k}$ dans R est

$$-\sum_i a_{i,s}\,\alpha_{i,k}, \quad (i = 1, 2 \ldots, r-1, r+1, \ldots, n).$$

De même, le coefficient de $a_{i,s}$ dans R est

$$-\sum_k a_{r,k}\,\alpha_{i,k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, s-1, s+1 \ldots n).$$

2. Si le système des éléments donnés est symétrique, de sorte qu'on ait $a_{k,i} = a_{i,k}$, et que R' soit le coefficient de l'élément $a_{r,r}$ dans R, et $\alpha_{i,k}$ le coefficient de l'élément $a_{i,k}$ dans R', on trouve (1)

$$R = a_{r,r}\,R' - \sum_{i,k} a_{r,i}\,a_{r,k}\,\alpha_{i,k}.$$

Les termes de la somme répondant à des valeurs inégales de i et de k, sont, dans ce cas, égaux deux à deux, puisque $\alpha_{k,i} = \alpha_{i,k}$ (§ III, 8).

EXEMPLES :

$$\begin{vmatrix} a & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 \end{vmatrix} = aa_1a_2 - ab_{12}^2 - a_1b_{02}^2 - a_2b_{01}^2 + 2b_{01}b_{02}b_{12}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 & b_{23} \\ b_{03} & b_{13} & b_{23} & a_3 \end{vmatrix} = \begin{aligned}[t] & a(a_1a_2a_3 - a_1b_{23}^2 - a_2b_{13}^2 - a_3b_{12}^2 + 2b_{12}b_{13}b_{23}) \\ & - b_{01}^2(a_2a_3 - b_{23}^2) - b_{02}^2(a_1a_3 - b_{13}^2) - b_{03}^2(a_1a_2 - b_{12}^2) \\ & + 2b_{01}b_{02}(a_3b_{12} - b_{13}b_{23}) + 2b_{01}b_{03}(a_2b_{13} - b_{12}b_{23}) \\ & + 2b_{02}b_{03}(a_1b_{23} - b_{12}b_{13}). \end{aligned}$$

Comme cas particuliers, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c_1 & b_1 \\ b & c_1 & 0 & a_1 \\ c & b_1 & a_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2 - 2aa_1bb_1 - 2aa_1cc_1 - 2bb_1cc_1 \\ &= (aa_1 + bb_1 - cc_1)^2 - 4aa_1bb_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = -(\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})(\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} - \sqrt{cc_1}) \\ \times (\sqrt{aa_1} - \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})(-\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1}). \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \\ &= (a + b - c)^2 - 4ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = -(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\ \times (-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}). \end{aligned}$$

§ VI. — *Des produits de déterminants.*

1. Théorème. — Formons, avec deux systèmes donnés d'éléments,

$$\begin{matrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,p}, \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_{1,1}, \ldots, b_{1,p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n,1}, \ldots, b_{n,p}, \end{matrix}$$

un troisième système d'éléments,

$$\begin{matrix} c_{1,1}, \ldots, c_{1,n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n,1}, \ldots, c_{n,n}, \end{matrix}$$

de telle sorte que le $k^{\text{ième}}$ élément $c_{i,k}$ de la $i^{\text{ième}}$ ligne horizontale s'obtienne en multipliant les éléments de la $i^{\text{ième}}$

ligne horizontale du premier système

$$a_{i,1},\ a_{i,2},\ldots,\ a_{i,p}$$

respectivement par les éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne horizontale du second système

$$b_{k,1},\ b_{k,2},\ldots,\ b_{k,p},$$

et faisant la somme des produits, ce qui donne

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + \ldots + a_{i,p}\, b_{k,p}.$$

Désignons par R le déterminant de ce système

$$\sum \pm c_{1,1}\, c_{2,2} \ldots c_{n,n}.$$

Formons, au moyen d'une combinaison de n lignes verticales quelconques du premier système, le déterminant P, et au moyen de P, par le changement de a en b, le déterminant Q, dont les éléments appartiennent au second système. En formant la somme de tous les produits PQ possibles, on a

$$\mathrm{R} = \sum \mathrm{PQ}.$$

Quand $p = n$, R se réduit au produit unique PQ. Quand $p < n$, R est identiquement nul (*).

Démonstration. — En faisant prendre à chacun des indices indéterminés $r, s, t, \ldots$ successivement les valeurs $1, 2, \ldots, p$, alors, par hypothèse, le terme principal du déterminant sera

$$c_{1,1}\, c_{2,2} \ldots c_{n,n} = \left(\sum_r a_{1,r}\, b_{1,r}\right)\left(\sum_s a_{2,s}\, b_{2,s}\right)\left(\sum_t a_{3,t}\, b_{3,t}\right)\ldots$$

$$= \sum_{r,s,t,\ldots} a_{1,r}\, a_{2,s}\, a_{3,t} \ldots b_{1,r}\, b_{2,s}\, b_{3,t} \ldots.$$

(*) Binet et Cauchy (dans des Mémoires publiés en même temps, *Journal de l'École Polytechnique*, XVI[e] cahier, p. 286, et XVII[e] cahier, p. 81 et 107), ont déduit cette proposition de la considération des cas particuliers

De là on déduit les autres termes de R, en permutant les seconds indices des éléments c, les premiers indices demeurant immobiles. Or, dans cette opération, les premiers indices des élements b sont seuls permutés sous le signe sommatoire, tous les autres indices n'éprouvant aucun changement. Par conséquent on a

$$\mathrm{R} = \sum_{r,s,t,\ldots} \left(a_{1,r}\, a_{2,s}\, a_{3,t} \ldots \sum \pm b_{1,r}\, b_{2,s}\, b_{3,t} \ldots \right)$$

$$= \sum_{r,s,t,\ldots} a_{1,r}\, a_{2,s}\, a_{3,t} \ldots \mathrm{Q}.$$

Le déterminant Q s'annule lorsque deux des indices r, s, $t, \ldots$ sont égaux entre eux (§ II, 4). On obtient donc tous les termes de la somme à former, en remplaçant r, s, $t, \ldots$, par tous les systèmes de valeurs de n indices différents pris dans la suite $1, 2, \ldots p$.

Si l'on a maintenant $p < n$, alors $\mathrm{R} = 0$. Car, parmi les indices r, s, $t, \ldots$, dont les valeurs doivent être prises dans la suite $1, 2, \ldots, p$, et qui sont au nombre de n, il faut qu'il y en ait quelques-uns égaux entre eux; par conséquent, pour toutes les déterminations possibles de r, s, $t, \ldots$, on aura identiquement

$$\mathrm{Q} = 0.$$

Si $p = n$, alors on ne peut prendre, pour système de valeurs des indices r, s, $t, \ldots$, que les diverses permutations de $1, 2, \ldots, n$, parce que, pour tout autre système de valeurs, Q serait identiquement nul. Or, par la permutation des indices r, s, $t, \ldots$, Q se changera soit en Q, soit en $-$Q (§ II, 4); par conséquent, la somme désignée par R

---

qu'avaient donnés Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1773, p. 285) et Gauss (*Disquis. arithm.,* 157, 159, 268, I). Voir JACOBI, *Det.,* 13 et 14.

contient tous les termes du déterminant $\sum \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$, multipliés par le facteur Q; c'est-à-dire que l'on a

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} \ldots a_{1,n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n,1} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \ldots b_{1,n} \\ \ldots\ldots \\ b_{n,1} \ldots b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Si $p > n$, on peut prendre d'abord pour systèmes de valeurs des indices $r, s, t, \ldots$, toutes les combinaisons n à n des nombres $1, 2, \ldots, p$. On trouve sinsi $\binom{p}{n}$ termes de la somme cherchée, d'où l'on peut déduire tous les autres en remplaçant chaque combinaison $r, s, t, \ldots$ par ses diverses permutations. D'après les remarques qu'on a faites pour le cas des $p = n$, chacun des $\binom{p}{n}$ termes, joint à ceux que l'on en déduit, forme le produit de deux déterminants PQ. On a donc

$$R = \sum \begin{vmatrix} a_{1,r} & a_{1,s} & a_{1,t} \ldots \\ a_{2,r} & a_{2,s} & a_{2,t} \ldots \\ a_{3,r} & a_{3,s} & a_{3,t} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,r} & b_{1,s} & b_{1,t} \ldots \\ b_{2,r} & b_{2,s} & b_{2,t} \ldots \\ b_{3,r} & b_{3,s} & b_{3,t} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

où l'on prendra pour les systèmes de valeurs $r, s, t, \ldots$, toutes les combinaisons n à n des nombres de la suite $1, 2, \ldots, p$.

EXEMPLE. — En posant

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + a_{i,3}\, b_{k,3},$$

on a

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} \end{vmatrix} = 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,2} & b_{2,3} \end{vmatrix}.$$

2. Si, en particulier, les éléments b sont respectivement égaux aux éléments a marqués des mêmes indices, alors le système des éléments c est symétrique; c'est-à-dire qu'on a

$$c_{i,k} = c_{k,i} = a_{i,1}\, a_{k,1} + a_{i,2}\, a_{k,2} + \ldots + a_{i,p}\, a_{k,p},$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} \ldots c_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{n,1} \ldots c_{n,n} \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} a_{1,r} & a_{1,s} & a_{1,t} \ldots \\ a_{2,r} & a_{2,s} & a_{2,t} \ldots \\ a_{3,r} & a_{3,s} & a_{3,t} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}^2,$$

en prenant successivement pour systèmes de valeurs de $r, s, t, \ldots$ toutes les combinaisons n à n des nombres $1, 2, \ldots, p$, et faisant la somme des résultats.

Tant que les éléments a sont réels, le déterminant $\sum \pm c_{1,1}\, c_{2,2} \ldots c_{n,n}$ est positif, et ne peut s'annuler que si le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,r} & a_{1,s} & a_{1,t} \ldots \\ a_{2,r} & a_{2,s} & a_{2,t} \ldots \\ a_{3,r} & a_{3,s} & a_{3,t} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

est nul pour toutes les combinaisons $r, s, t, \ldots$ (*). Le cas particulier

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & xx_1+yy_1+zz_1, & xx_2+yy_2+zz_2 \\ x_1x+y_1y+z_1z, & x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \\ x_2x+y_2y+z_2z, & x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1, & x_2^2+y_2^2+z_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

avait déjà été trouvé par Lagrange (*Sur les Pyramides*, 3).

3. *Le produit de deux déterminants* P *et* Q *de degré n est un déterminant* R *de même degré*, que l'on peut écrire sous quatre formes, en général différentes entre elles (**), en composant chacun de leurs éléments soit avec une ligne horizontale de P et une ligne horizontale de Q, soit avec une ligne horizontale de P et une ligne verticale de Q, soit avec une ligne verticale de P et une ligne horizontale de Q, soit enfin avec une ligne verticale de P et une ligne verticale de Q. Si l'on pose, en effet,

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} \ldots a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad Q = \begin{vmatrix} b_{1,1} \ldots b_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n,1} \ldots b_{n,n} \end{vmatrix},$$

on a, d'après le théorème 1,

$$R = \begin{vmatrix} c_{1,1} \ldots c_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{n,1} \ldots c_{n,n} \end{vmatrix} = PQ,$$

en supposant que l'on prenne

$$c_{i,k} = a_{i,1}\,b_{k,1} + a_{i,2}\,b_{k,2} + \ldots + a_{i,n}\,b_{k,n}.$$

(*) JACOBI, *Det.*, 13.

(**) CAUCHY, *loc. cit.*, p. 83.

On a par conséquent

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n,1} \dots b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\dots+a_{1,n}b_{1,n}, & a_{1,1}b_{2,1}+\dots+a_{1,n}b_{2,n}, \dots, & a_{1,1}b_{n,1}+\dots+a_{1,n}b_{n,n} \\ a_{2,1}b_{1,1}+\dots+a_{2,n}b_{1,n}, & a_{2,1}b_{2,1}+\dots+a_{2,n}b_{2,n}, \dots, & a_{2,1}b_{n,1}+\dots+a_{2,n}b_{n,n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n,1}b_{1,1}+\dots+a_{n,n}b_{1,n}, & a_{n,1}b_{2,1}+\dots+a_{n,n}b_{2,n}, \dots, & a_{n,1}b_{n,1}+\dots+a_{n,n}b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

D'après la règle de formation que nous venons de donner, on a encore

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{n,1} \\ \dots\dots\dots \\ b_{1,n} \dots b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\dots+a_{1,n}b_{n,1}, \dots, & a_{1,1}b_{1,n}+\dots+a_{1,n}b_{n,n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n,1}b_{1,1}+\dots+a_{n,n}b_{n,1}, \dots, & a_{n,1}b_{1,n}+\dots+a_{n,n}b_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{n,1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{1,n} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n,1} \dots b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\dots+a_{n,1}b_{1,n}, \dots, & a_{1,1}b_{n,1}+\dots+a_{n,1}b_{n,n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{1,n}b_{1,1}+\dots+a_{n,n}b_{1,n}, \dots, & a_{1,n}b_{n,1}+\dots+a_{n,n}b_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{n,1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{1,n} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{n,1} \\ \dots\dots\dots \\ b_{1,n} \dots b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\dots+a_{1,n}b_{1,n}, \dots, & a_{1,1}b_{n,1}+\dots+a_{1,n}b_{n,n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n,1}b_{1,1}+\dots+a_{n,n}b_{1,n}, \dots, & a_{n,1}b_{n,1}+\dots+a_{n,n}b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Les déterminants qui entrent comme facteurs dans les

premiers membres de ces égalités, ne sont autre chose que P et Q (§ II, 3). Donc les déterminants qui forment les seconds membres ne diffèrent point de R, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n,1} \dots b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} \dots c_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n,1} \dots c_{n,n} \end{vmatrix},$$

$c_{i,k}$ désignant l'une quelconque des quatre sommes

$$\begin{aligned} &a_{i,1} b_{k,1} + a_{i,2} b_{k,2} + \dots + a_{i,n} b_{k,n}, \\ &a_{i,1} b_{1,k} + a_{i,2} b_{2,k} + \dots + a_{i,n} b_{n,k}, \\ &a_{1,i} b_{k,1} + a_{2,i} b_{k,2} + \dots + a_{n,i} b_{k,n}, \\ &a_{1,i} b_{1,k} + a_{2,i} b_{2,k} + \dots + a_{n,i} b_{n,k}. \end{aligned}$$

4. *Le produit d'autant de déterminants qu'on voudra est un déterminant* dont le degré ne surpasse pas le plus élevé des degrés donnés, et dont les éléments sont des fonctions rationnelles et entières des éléments donnés (*). En effet, si les degrés des déterminants donnés ne surpassent pas le $n^{ième}$, on pourra mettre tous les déterminants sous la forme de déterminants du $n^{ième}$ degré, et alors, d'après la règle (3), multiplier le premier par le second, le produit par le troisième, et ainsi de suite.

D'après le § II, 6, on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m,1} \dots a_{m,m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1} \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

si chacun des éléments $a_{i,k}$, pour $i > m$, est égal à zéro ou à l'unité, selon que $k \leq i$, les autres éléments non donnés

(*) JACOBI, *Det.*, 13.

restant indéterminés. On a par suite

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m,1} \dots a_{m,m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n,1} \dots b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots b_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n,1} \dots b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} \dots c_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n,1} \dots c_{n,n} \end{vmatrix},$$

en supposant

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{k,1} + a_{i,2} b_{k,2} + \dots + a_{i,n} b_{k,n}.$$

De cette somme il ne reste, pour $i > m$, que les termes

$$b_{k,i} + a_{i,i+1} b_{k,i+1} + \dots + a_{i,n} b_{k,n}.$$

Si les éléments indéterminés sont tous nuls, on a

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{k,1} + a_{i,2} b_{k,2} + \dots + a_{i,m} b_{k,m},$$

ce qui, pour $i > m$, se réduit à $b_{k,i}$ seulement.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ap + bq, & ap_1 + bq_1, & c, & d \\ a_1 p + b_1 q, & a_1 p_1 + b_1 q_1, & c_1, & d_1 \\ a_2 p + b_2 q, & a_2 p_1 + b_2 q_1, & c_2, & d_2 \\ a_3 p + b_3 q, & a_3 p_1 + b_3 q_1, & c_3, & d_3 \end{vmatrix}.$$

5. Théorème. — Soient

$$P = \sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n},$$

$$Q = \sum \pm b_{1,1} b_{2,2} \dots b_{n,n},$$

$$R = \sum \pm c_{1,1} c_{2,2} \dots c_{n,n},$$

en supposant

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{k,1} + a_{i,2} b_{k,2} + \dots + a_{i,n} b_{k,n},$$

de sorte que $PQ = R$ (1); soient de plus $\alpha_{i,k}, \beta_{i,k}, \gamma_{i,k}$ les coefficients de $a_{i,k}, b_{i,k}, c_{i,k}$ respectivement dans P, Q, R :

on aura

$$\gamma_{i,k} = \alpha_{i,1}\,\beta_{k,1} + \alpha_{i,2}\,\beta_{k,2} + \ldots + \alpha_{i,n}\,\beta_{k,n},$$

et si en particulier $b_{i,k} = a_{i,k}$,

$$\gamma_{i,i} = \alpha_{i,1}^2 + \alpha_{i,2}^2 + \ldots + \alpha_{i,n}^2 \;(*).$$

Démonstration. — Le coefficient de $a_{i,r}$ dans PQ est, d'après ce qu'on a supposé, $\alpha_{i,r}\,Q$. Comme on a de plus (§ III, 1)

$$R = \sum_s c_{i,s}\,\gamma_{i,s}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

$$= \sum_s (a_{i,1}\,b_{s,1} + a_{i,2}\,b_{s,2} + \ldots + a_{i,n}\,b_{s,n})\,\gamma_{i,s},$$

il s'ensuit que $\sum_s b_{s,r}\,\gamma_{i,s}$ est le coefficient de $a_{i,r}$ dans R. Or on a PQ = R; par conséquent

$$\alpha_{i,r}\,Q = \sum_s b_{s,r}\,\gamma_{i,s},$$

$$Q\sum_r \alpha_{i,r}\,\beta_{k,r} = \sum_{r,s} \gamma_{i,s}\,b_{s,r}\,\beta_{k,r} = \sum_s \left(\gamma_{i,s}\sum_r b_{s,r}\,\beta_{k,r}\right).$$

La somme $\sum_r b_{s,r}\,\beta_{k,r}$, dont les termes répondent aux valeurs $r = 1, 2, \ldots, n$, s'annule toutes les fois que s est différent de k, et a pour valeur Q lorsque $s = k$ (§ III, 1). Il ne reste donc, de la somme totale, que le terme $\gamma_{i,k}\,Q$,

(*) CAUCHY, *loc. cit.*, p. 90. — Comp. JOACHIMSTHAL, *Journal de Crelle*, t. XL, p. 46. Ce théorème est renfermé dans le théorème général (1).

de sorte que

$$\sum_r \alpha_{i,r}\beta_{k,r} = \gamma_{i,k}.$$

EXEMPLE. — Si l'on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s & t \\ r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \end{vmatrix}$$

en vertu des équations

$$\begin{array}{l} r = al \;\; + bm \;\; + cn, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_2 = a_2 l_2 + b_2 m_2 + c_2 n_2; \end{array}$$

si de plus on désigne les coefficients de $a, b, \ldots, l, m, \ldots, r, s, \ldots$ dans les divers déterminants par les lettres grecques correspondantes, on a, d'après le théorème qu'on vient de démontrer,

$$\tau_2 = \alpha_2\lambda_2 + \beta_2\mu_2 + \gamma_2\nu_2;$$

par conséquent

$$\begin{vmatrix} a\;l + b\;m + c\;n, & a\;l_1 + b\;m_1 + c\;n_1 \\ a_1 l + b_1 m + c_1 n, & a_1 l_1 + b_1 m_1 + c_1 n_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n & l \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}.$$

Dans le cas particulier où le second système est identique avec le premier, on a l'identité suivante, qui est d'un fréquent usage (*) :

$$\begin{array}{l} (a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 \\ = (bc_1 - b_1 c)^2 + (ca_1 - c_1 a)^2 + (ab_1 - a_1 b)^2. \end{array}$$

(*) LAGRANGE, *Sur les Pyramides*, 1.

§ VII. — *Des déterminants de systèmes adjoints.*

1. En désignant par $\alpha_{i,k}$ le coefficient de $a_{i,k}$ dans le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1} \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

le système des éléments

$$\begin{matrix} \alpha_{1,1}, \dots, & \alpha_{1,n} \\ \dots\dots\dots & \dots \\ \alpha_{n,1}, \dots, & \alpha_{n,n} \end{matrix}$$

est dit *adjoint* (*) au système des éléments a.

THÉORÈME. — Le déterminant du système d'éléments adjoint à un système donné de n^2 éléments est égal à la $(n-1)^{ième}$ puissance du déterminant du système donné (**).

Démonstration. — En multipliant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} \dots \alpha_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n,1} \dots \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

par R, on obtient (§ VI, 3)

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} \dots c_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n,1} \dots c_{n,n} \end{vmatrix},$$

(*) CAUCHY, *loc. cit.*, p. 64, a emprunté cette dénomination à la théorie des formes quadratiques (*Disquis. arithm.*, 267).

(**) CAUCHY, *loc. cit.*, p. 82. Le cas de $n = 3$ se trouve chez Lagrange (*Sur les Pyr.*, 5) et chez Gauss, *loc. cit.*

en prenant

$$c_{i,k} = \alpha_{i,1} a_{k,1} + \alpha_{i,2} a_{k,2} + \ldots + \alpha_{i,n} a_{k,n}.$$

Ces éléments c ont la valeur R ou la valeur o, suivant que i et k sont égaux ou inégaux (§ III, 1). Leur déterminant se réduit donc à son terme principal

$$c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{n,n} = R^n$$

(§ II, 7). On a donc

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n,1} \ldots \alpha_{n,n} \end{vmatrix} R = R^n,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} \ldots & \alpha_{1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} \ldots & a_{1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}^{n-1}.$$

2. Théorème. — Un déterminant partiel de degré m du système adjoint est le produit de R^{m-1} par le coefficient qui multiplie dans R le déterminant partiel correspondant du système primitif (*).

Démonstration. — Soient

$$f, g, \ldots, r, s, \ldots,$$
$$i, k, \ldots, u, v, \ldots,$$

des permutations données de 1, 2, ..., n, et supposons que $f, g, \ldots$, et $i, k, \ldots$ désignent des groupes de m indices, les $n-m$ indices restants étant désignés par $r, s, \ldots$, et par $u, v, \ldots$. Le déterminant de degré m

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} \ldots \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

(*) Jacobi, *Det.*, 11. La multiplication par R du déterminant cherché, employée dans cette démonstration, a été indiquée par Borchardt.

sera un déterminant partiel du système adjoint (§ IV, 3). Or on a, d'après les hypothèses admises,

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} \ldots & a_{f,u} & a_{f,v} \ldots \\ a_{g,i} & a_{g,k} \ldots & a_{g,u} & a_{g,v} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r,i} & a_{r,k} \ldots & a_{r,u} & a_{r,v} \ldots \\ a_{s,i} & a_{s,k} \ldots & a_{s,u} & a_{s,v} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \varepsilon R,$$

ε ayant pour valeur $+1$ ou -1, selon que les permutations données appartiennent ou n'appartiennent pas à la même classe (§ II, 4). Pour multiplier le déterminant partiel cherché par εR, on peut le mettre (§ VI, 4) sous la forme

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} \ldots & \alpha_{f,u} & \alpha_{f,v} \ldots \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} \ldots & \alpha_{g,u} & \alpha_{g,v} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r,i} & b_{r,k} \ldots & b_{r,u} & b_{r,v} \ldots \\ b_{s,i} & b_{s,k} \ldots & b_{s,u} & b_{s,v} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

les éléments b ayant pour valeur 1 ou 0, suivant qu'ils se trouvent ou ne se trouvent pas sur la diagonale. Le produit des deux déterminants est le déterminant d'un système d'éléments c, parmi lesquels $c_{1,1}, c_{2,2}, \ldots, c_{m,m}$ ont pour valeur R, tandis que les autres éléments des m premières lignes horizontales sont nuls (§ III, 1). Les $(m+1)^{ième}$, $(m+2)^{ième}, \ldots$ lignes horizontales sont respectivement égales aux $(m+1)^{ième}$, $(m+2)^{ième}, \ldots$ lignes verticales dans εR. Or ce déterminant se réduit (§ IV, 2) au produit de deux déterminants, dont le premier a pour valeur R^m (§ II, 7); le second est

$$\begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{s,u} \ldots \\ a_{r,v} & a_{s,v} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} \ldots \\ a_{s,u} & a_{s,v} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} \quad (\text{§ II, 3}).$$

On a par conséquent

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} \ldots \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \mathrm{R}^{m-1} \varepsilon \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} \ldots \\ a_{s,u} & a_{s,v} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

D'après le § IV, 3,

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} \ldots \\ a_{s,u} & a_{s,v} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

représente le coefficient qui multiplie, dans R, le déterminant partiel

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} \ldots \\ a_{g,i} & a_{g,k} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

du système donné, dont les éléments sont affectés des mêmes indices que ceux du déterminant cherché.

Exemples. — Si l'on suppose

$$\mathrm{R} = \sum \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{k+1,k+1} \ldots & \alpha_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,k+1} \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \mathrm{R}^{n-k-1} \begin{vmatrix} a_{1,1} \ldots & a_{1,k} \\ \ldots & \ldots \\ a_{k,1} \ldots & a_{k,k} \end{vmatrix} \; (*).$$

De même,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} \ldots & \alpha_{1,m} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{m,1} \ldots & \alpha_{m,m} \end{vmatrix} = \mathrm{R}^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} \ldots & a_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,m+1} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

(*) Jacobi, *loc. cit.*

En particulier, pour $n = 5$, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} = -R^2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix},$$

parce que les permutations

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{matrix}$$

n'appartiennent pas à la même classe.

On a, au contraire,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

parce que

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$

sont des permutations de la même classe.

3. Le coefficient de l'élément $\alpha_{i,k}$, dans le déterminant des éléments adjoints

$$\sum \pm \alpha_{1,1}\, \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n,n}$$

est

$$R^{n-2}\, a_{i,k}.$$

Car ce coefficient est un déterminant partiel du système adjoint, du $(n-1)^{ième}$ degré, et le coefficient qui multiplie dans R le déterminant partiel correspondant du système primitif, est $a_{i,k}$, comme on le voit immédiatement. Si, en particulier, $n = 3$, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = R\, a_{33}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = R\, a_{31}, \text{ etc. } (*).$$

(*) LAGRANGE, *Sur les Pyr.*, 3.

4. En général, pour calculer un déterminant partiel du second degré dans le système adjoint, par exemple,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} \end{vmatrix},$$

on a besoin du coefficient qui multiplie, dans R, le déterminant correspondant

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} \\ a_{g,i} & a_{g,k} \end{vmatrix}.$$

Ce coefficient n'est autre que celui qui multiplie, dans R, le produit $a_{f,i}\, a_{g,k}$ (§ IV, 3). Par conséquent, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} \end{vmatrix} = \mathrm{R}\,\frac{d^2\mathrm{R}}{da_{f,i}\;da_{g,k}}\ (*).$$

On a de même

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} & \alpha_{f,l} \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} & \alpha_{g,l} \\ \alpha_{h,i} & \alpha_{h,k} & \alpha_{h,l} \end{vmatrix} = \mathrm{R}^2\,\frac{d^3\mathrm{R}}{da_{f,i}\;da_{g,k}\;d_{h,l}},$$

et ainsi de suite.

Ces identités font connaître en même temps comment les quotients différentiels du second, du troisième,..., ordre d'un déterminant peuvent s'exprimer au moyen des quotients différentiels partiels du premier ordre de ce déterminant.

5. *Lorsque* R *est identiquement nul,* il en est de même des déterminants partiels du système adjoint du 2e, du 3e,... degré, puisqu'ils contiennent R en facteur (2). De l'identité

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} \end{vmatrix} = 0,$$

(*) JACOBI, *Det.*, 10.

résultent les proportions

$$\alpha_{f,i} : \alpha_{f,k} = \alpha_{g,i} : \alpha_{g,k}, \qquad \alpha_{f,i} : \alpha_{g,i} = \alpha_{f,k} : \alpha_{g,k},$$

$$\alpha_{f,1} : \alpha_{f,2} : \alpha_{f,3} : \ldots = \alpha_{g,1} : \alpha_{g,2} : \alpha_{g,3} : \ldots,$$

$$\alpha_{1,i} : \alpha_{2,i} : \alpha_{3,i} : \ldots = \alpha_{1,k} : \alpha_{2,k} : \alpha_{3,k} : \ldots \text{ (*)}.$$

Si, en particulier, les éléments du système donné sont tels, que l'on ait $\alpha_{k,i} = \pm\, \alpha_{i,k}$, alors, dans l'hypothèse de R identiquement nul, on a aussi

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i,i} & \alpha_{i,k} \\ \pm\, \alpha_{i,k} & \alpha_{k,k} \end{vmatrix} = 0,$$

et par suite

$$\alpha_{i,k} = \sqrt{\pm\, \alpha_{i,i}\, \alpha_{k,k}}.$$

Delà résulte la proportion

$$\alpha_{i,1} : \alpha_{i,2} : \alpha_{i,3} : \ldots = \sqrt{\alpha_{1,1}} : \sqrt{\alpha_{2,2}} : \sqrt{\alpha_{3,3}} : \ldots,$$

ce qui fait voir, d'une part, que les rapports

$$\alpha_{i,1} : \alpha_{i,2} : \alpha_{i,3} : \ldots$$

sont indépendants de i, et d'autre part que le signe de l'un de ces radicaux détermine les signes de tous les autres.

§ VIII. — *Du déterminant d'un système dans lequel les éléments correspondants $a_{i,k}$ et $a_{k,i}$ sont égaux et de signes contraires* (**).

1. Théorème. — Un déterminant de degré pair

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} \ldots & a_{1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

dont les éléments sont tels, que l'on ait

$$a_{k,i} = -a_{i,k}, \qquad a_{i,i} = 0,$$

(*) Jacobi, *Journal de Crelle*, t. XV, p. 104 et ailleurs.

(**) Un pareil système et son déterminant ont été appelés par Cayley

est le carré d'une fonction rationnelle des éléments (*).

Démonstration. — En désignant par R′ le coefficient de $a_{1,1}$ dans R, et par $\alpha_{i,k}$ le coefficient de $a_{i,k}$ dans R′, on a (§ V, 2)

$$R = a_{1,1} R' - \sum_{i,k} a_{i,1}\, a_{1,k}\, \alpha_{i,k},$$

i et k recevant les valeurs $2, 3, \ldots, n$. En vertu des hypothèses faites sur les éléments, on a identiquement

$$R' = 0 \text{ (§ III, 9)}, \quad \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} = \sqrt{\alpha_{i,i}\,\alpha_{k,k}} \text{ (§ VII, 5)}.$$

Si l'on détermine maintenant les signes des radicaux de telle sorte que $\sqrt{\alpha_{i,i}}\,\sqrt{\alpha_{k,k}}$ ait pour valeur $\alpha_{i,k}$ (et non $-\alpha_{i,k}$), il vient

$$R = \sum_{i,k} a_{1,i}\, a_{1,k} \sqrt{\alpha_{i,i}}\, \sqrt{\alpha_{k,k}}$$

$$= \left(\sum_i a_{1,i} \sqrt{\alpha_{i,i}}\right)\left(\sum_k a_{1,k} \sqrt{\alpha_{k,k}}\right),$$

ou, puisque la seconde somme ne diffère pas de la première,

$$R = \left(\sum_i a_{1,i} \sqrt{\alpha_{i,i}}\right)^2,$$

et par suite

$$\sqrt{R} \sum_i a_{1,i} \sqrt{\alpha_{i,i}}$$

est une somme de $n - 1$ termes. Or $\alpha_{i,i}$ est un déterminant de degré $n - 2$, où la série des premiers indices est la même que celle des seconds, et se compose des nombres

(*Journal de Crelle*, t. XXXII, p. 119; t. XXXVIII, p. 93; t. L, p. 299) *gauches* (*skew, gobbo*).

(*) Cayley, *Journal de Crelle*, t. XXXVIII, p. 95. La démonstration donnée dans cet endroit ne lève pas toutes les difficultés.

$2, 3, \ldots, n$, à l'exclusion de i. D'après la règle trouvée pour la décomposition de $\sqrt{\mathrm{R}}$, $\sqrt{\alpha_{i,i}}$ peut se décomposer en $n-3$ termes, dont chacun est le produit d'un élément par la racine d'un semblable déterminant de degré $n-4$, et ainsi de suite. Or la racine carrée d'un semblable déterminant du second degré est rationnelle, car la racine de

$$\begin{vmatrix} a_{u,u} & a_{u,v} \\ a_{v,u} & a_{v,v} \end{vmatrix}$$

est ici $a_{u,v}$ ou $a_{v,u}$. D'après cela, $\sqrt{\mathrm{R}}$ se présente sous la forme d'une somme, que l'on prendra positivement ou négativement, et composée de

$$(n-1)(n-3)\ldots 3.1 = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots\frac{n}{2}.2^{\frac{n}{2}}}$$

termes; chacun de ces termes est un produit de $\frac{n}{2}$ éléments, dont les indices sont tous différents entre eux, de sorte que l'ensemble des premiers et des seconds indices forme une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$.

Pour premier terme de cette somme, on trouve

$$\pm a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots a_{n-1,n},$$

puisque, d'après la règle précédente, on obtient successivement, en effectuant le développement,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathrm{R}} &= a_{1,2}\mathrm{A} + \ldots, \\ \mathrm{A} &= a_{3,4}\mathrm{B} + \ldots, \\ \mathrm{B} &= a_{5,6}\mathrm{C} + \ldots, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Et en effet,

$$(a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots a_{n-1,n})^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}\, a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,4}\, a_{4,3} \ldots a_{n-1,n}\, a_{n,n-1},$$

est un terme positif du déterminant R, parce que les permutations

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ n-1,\ n,$$
$$2,\ 1,\ 4,\ 3,\ldots,\ n,\ n-1,$$

appartiennent ou n'appartiennent pas à la même classe, selon que $\frac{n}{2}$ est pair ou impair.

2. Théorème. — L'expression

$$S = a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots a_{n-1,n} + \ldots,$$

dont le carré est égal au déterminant R considéré ci-dessus, prend la valeur opposée quand on échange entre eux deux indices, et s'annule identiquement quand deux indices sont égaux entre eux (*).

Démonstration. — En désignant par S_1 ce que devient S lorsqu'on y échange entre eux les indices i et k, S_1^2 sera ce que devient le déterminant R par l'échange des mêmes indices. Or i et k entrent dans R tant comme premiers indices que comme seconds indices, et partant R n'est pas altéré par cet échange (§ II, 4); on a donc $S_1^2 = S^2$. Par suite de cette identité, les termes de S_1 sont égaux respectivement aux termes de S, et sont tous de mêmes signes ou tous de signes contraires, suivant qu'un terme de S_1 et son égal dans S sont de même signe ou de signe contraire. Or, en désignant par $a_{i,k}$ B la somme des termes de S où entre l'élément $a_{i,k}$, B ne contiendra que des éléments ayant leurs deux indices différents de i et de k (1); par conséquent, par l'échange de i et de k, $a_{i,k}$ B se change en $a_{k,i}$ B.

(*) L'expression S a été introduite par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. II, p. 354; XXIX, p. 236), qui s'en est servi en traitant de la méthode d'intégration de Pfaff, et Cayley (*loc. cit.*) l'a désignée récemment sous le nom de *Pfaffian*. Ses propriétés ont été énoncées par Jacobi sans démonstration, et sans la relation fondamentale $S^2 = R$.

Les termes $a_{i,k}B$, de S, et $a_{k,i}B$, de S_1, sont égaux et de signe contraire, puisque $a_{k,i} = -a_{i,k}$; par suite S et S_1 sont aussi égaux et de signe contraire.

Si les indices i et k sont égaux, S_1 est égal identiquement non-seulement à $-S$, mais aussi à S; donc S est identiquement nul.

3. L'expression dont le carré est un déterminant de l'espèce que nous considérons ici, peut sans ambiguïté être désignée, ainsi que le fait Jacobi, par la série des indices des éléments de son premier terme, laquelle est identique avec les séries des premiers et des seconds indices des éléments du déterminant. Le symbole

$$(1, 2, 3, \ldots, n)$$

désigne, d'après cela, la somme commençant par le terme principal $a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots a_{n-1,n}$, et dont le carré forme le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} \ldots a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix},$$

toujours dans l'hypothèse où l'on a $a_{k,i} = -a_{i,k}$, $a_{i,i} = 0$, et n pair. Il résulte du théorème précédent que l'on a

$$\begin{gathered}(1, 2, 3, \ldots, n) = (3, 4, 1, 2, \ldots, n) \\ = -(2, 3, \ldots, n, 1) = -(2, 1, 3, \ldots, n),\end{gathered}$$

etc. On peut donc prendre pour $\sqrt{R}$, en général, soit

$$(1, 2, 3, \ldots, n),$$

soit encore

$$(2, 1, 3, \ldots, n),$$

ou toute autre permutation de ces indices, puisque ces différents symboles ne peuvent être qu'égaux au signe près.

De même, $\sqrt{\alpha_{i,i}}$ peut être représenté (1) par une permu-

tation quelconque des indices $2, 3, \ldots, n$, à l'exclusion de i, tant que l'on considère cette expression isolément. Cependant, comme on doit avoir, en ayant égard aux signes,

$$\sqrt{\alpha_{i,i}}\sqrt{\alpha_{k,k}} = \alpha_{i,k},$$

et par conséquent.

$$\sqrt{R} = \sum_i a_{i,i}\sqrt{\alpha_{i,i}},$$

il faut donner aux termes de cette somme des signes déterminés, de manière que le signe de la somme reste seul indéterminé.

4. Théorème. — Pour le développement successif de l'expression $(1, 2, \ldots, n)$, on peut se servir de l'identité

$$\begin{aligned}(1,\ 2,\ 3, \ldots, n)\\ = a_{1,2}(3,\ 4, \ldots, n) + a_{1,3}(4, \ldots, n,\ 2) + \ldots\\ + a_{1,i}(i+1, \ldots n, 2, \ldots, i-1) + \ldots + a_{1,n}(2,\ 3, \ldots, n-1),\end{aligned}$$

la suite des indices entre parenthèses se déduisant de $2, 3, \ldots, n$ par des permutations circulaires, en excluant chaque fois l'indice qui se trouverait le dernier (*).

Démonstration. — En posant (3)

$$\sqrt{\alpha_{i,i}} = (-1)^i(2,\ 3, \ldots, i-1,\ i+1, \ldots, n),$$

et de même

$$\sqrt{\alpha_{k,k}} = (-1)^k(2,\ 3, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, n),$$

le produit

$$(-1)^{i+k}(2, 3, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)\ (2, 3, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$

(*) Jacobi et Cayley (*loc. cit.*) ont employé cette identité comme définition de $(1, 2, \ldots, n)$.

se composera des mêmes termes que $\alpha_{i,k}$ ou que $-\alpha_{i,k}$; puisque $\alpha_{i,i}\,\alpha_{k,k}$ est identique avec $\alpha_{i,k}^2$. D'après la notation de Vandermonde, on a (§ III, 5)

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} 2,3,\ldots, i-1, i+1,\ldots,n \\ 2,3,\ldots, k-1, k+1,\ldots,n \end{vmatrix},$$

la suite des premiers indices ne contenant ni 1, ni i, et celle des seconds indices ne contenant ni 1 ni k. En désignant par

$$p,\ q,\ r,\ s,\ldots,u,\ v$$

les $n-3$ autres indices qui font partie à la fois des deux suites, on sait (§ II, 4) que le rapport

$$\begin{vmatrix} 2,3\ldots, i-1, i+1,\ldots,n \\ 2,3\ldots, k-1, k+1,\ldots,n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} k,p,q,r,\ldots u,\ v \\ p,\ q,\ r,s,\ldots v,\ i \end{vmatrix}$$

est égal à une puissance déterminée de -1. Ce rapport est le même que celui du produit

$$(2,3,\ldots,i-1,i+1,\ldots.n)(2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots.n)$$

au produit

$$(k,p,q,r,\ldots,u,v)(p,q,r,s,\ldots,v,i).$$

Donc le déterminant

$$\begin{vmatrix} k,\ p,\ q,\ r,\ldots,\ u,\ v \\ p,\ q,\ r,\ s,\ldots,\ v,\ i \end{vmatrix}$$

et le produit

$$(k,p,q,r,\ldots,u,v)(p,q,r,s,\ldots,v,i)$$

ont la même valeur absolue. Le premier terme

$$a_{k,p}\ a_{p,q}\ a_{q,r}\ a_{r,s}\ldots a_{u,v}\ a_{v,i}$$

du déterminant, et le premier terme

$$a_{k,p}\ a_{q,r}\ldots\ a_{u,v}\ a_{p,q}\ldots a_{r,s}\ a_{v,i}$$

du produit sont de même signe; donc le déterminant et le

produit sont aussi de même signe. Il s'ensuit de là que $\sqrt{\alpha_{i,i}}\sqrt{\alpha_{k,k}}$ coïncidera avec $\alpha_{i,k}$ en grandeur et en signe, si l'on pose

$$\sqrt{\alpha_{i,i}} = (-1)^i (2, 3, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n),$$

ou, après $i-2$ permutations circulaires (3),

$$\sqrt{\alpha_{i,i}} = (i+1, \ldots, n, 2, \ldots, i-1).$$

Par cette substitution, on obtient (1)

$$\sum_i a_{1,i}\sqrt{\alpha_{i,i}} = a_{1,2}(3, \ldots, n) + a_{1,3}(4, \ldots, n, 2) + \ldots \\ + a_{1,n}(2, \ldots n-1),$$

pour une valeur de $\sqrt{R}$ que nous devrons désigner par

$$(1, 2, \ldots, n),$$

comme on s'en assure par l'identité des termes initiaux de $a_{1,2}(3, \ldots, n)$ et de $(1, 2, \ldots, n)$.

Exemples :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{14} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{41} & \ldots & a_{44} \end{vmatrix} = (1, 2, 3, 4)^2 = (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})^2.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{16} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{61} & \ldots & a_{66} \end{vmatrix} = (1, 2, \ldots, 6)^2 = \begin{bmatrix} a_{12}(3,4,5,6) + a_{13}(4,5,6,2) + \ldots \\ + a_{16}(2, 3, 4, 5) \end{bmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12}a_{34}a_{56} + a_{12}a_{35}a_{64} + a_{12}a_{36}a_{45} \\ + a_{13}a_{45}a_{62} + a_{13}a_{46}a_{25} + a_{13}a_{42}a_{56} \\ + a_{14}a_{56}a_{23} + a_{14}a_{52}a_{36} + a_{14}a_{53}a_{62} \\ + a_{15}a_{62}a_{34} + a_{15}a_{63}a_{42} + a_{15}a_{64}a_{23} \\ + a_{16}a_{23}a_{45} + a_{16}a_{24}a_{53} + a_{16}a_{25}a_{34} \end{pmatrix}^2.$$

et

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & f & e \\ -b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad - be + cf)^2.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad + be + cf)^2.$$

5. Le coefficient de $a_{i,k}$, dans le déterminant R que nous considérons ici, est (§ III, 9)

$$\frac{1}{2}\frac{dR}{da_{i,k}} = \sqrt{R}\,\frac{d\sqrt{R}}{da_{i,k}}.$$

Le coefficient de $a_{i,i}$ dans R, lequel est exprimé généralement par $\frac{dR}{da_{i,i}}$, s'évanouit dans ce cas (§ III, 9). Or, si l'on ordonne R par rapport aux éléments d'une ligne horizontale, on a (§ III, 1), en divisant par le facteur commun $\sqrt{R}$,

$$\sqrt{R} = a_{i,1}\frac{d\sqrt{R}}{da_{i,1}} + \ldots + a_{i,n}\frac{d\sqrt{R}}{da_{i,n}},$$

$$0 = a_{i,1}\frac{d\sqrt{R}}{da_{k,1}} + \ldots + a_{i,n}\frac{d\sqrt{R}}{da_{k,n}}\ (^*),$$

formules où l'on devra supposer $\frac{d\sqrt{R}}{da_{i,i}} = 0$.

En posant (3)

$$\sqrt{R} = (i,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i-1,\ i+1,\ \ldots,\ n)$$
$$= a_{i,1}(2,\ \ldots,\ n) + a_{i,2}(3,\ \ldots,\ n,\ 1) + \ldots,$$

(*) JACOBI, *loc. cit.*

on trouve

$$\frac{d\sqrt{R}}{da_{i,k}} = (k+1, \ldots, n, 1, \ldots, k-1),$$

i et k étant exclus du cycle des indices.

6. Théorème. — En désignant par D la valeur que prend le déterminant R des éléments quelconques $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$, lorsque les éléments

$$a_{1,1},\ a_{2,2},\ \ldots,\ a_{n,n}$$

s'annulent, et, de plus,

Par D_i la valeur que prend D, lorsqu'on supprime la ligne horizontale et la ligne verticale qui contiennent l'élément $a_{i,i}$;

Par $D_{i,k}$ la valeur que prend D, lorsqu'on supprime les lignes qui contiennent les éléments $a_{i,i}$ et $a_{k,k}$; et ainsi de suite;

On a alors

$$R = D + \sum a_{i,i} D_i + \sum a_{i,i} a_{k,k} D_{i,k} + \sum a_{i,i} a_{k,k} a_{l,l} D_{i,k,l} + \ldots + a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

en remplaçant successivement i par toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$; puis i, k par toutes les combinaisons binaires de ces valeurs; i, k, l par toutes leurs combinaisons ternaires, et ainsi de suite (*).

Démonstration. — Les termes de R qui ne contiennent aucun des éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots,$ coïncident avec les termes de D. Les termes de R, qui contiennent un seul de ces éléments, coïncident avec les termes de la somme

$$a_{1,2} D_1 + a_{2,2} D_2 + \ldots + a_{n,n} D_n.$$

(*) Cayley, *Journal de Crelle*, t. XXXVIII, p. 93.

Car du coefficient de $a_{i,i}$ dans R on formera D_i (§ III, 5), en annulant les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$. De même, les termes de R qui contiennent deux des éléments en question, coïncident avec les termes de la somme

$$\begin{aligned} a_{1,1}a_{2,2}D_{1,2} + a_{1,1}a_{3,3}D_{1,3} + \ldots \\ + a_{2,2}a_{3,3}D_{2,3} + \ldots \\ + \ldots; \end{aligned}$$

et ainsi de suite. De cette manière aucun des termes de R ne se trouve omis ni répété deux fois.

7. Si les éléments du déterminant R sont tels, que l'on ait :

$$a_{i,k} = -a_{k,i}, \quad a_{1,1} = a_{2,2} = \ldots = a_{n,n} = z,$$

on aura (6)

$$R = z^n + z^{n-2}\sum D_2 + z^{n-4}\sum D_4 + \ldots \; (*),$$

la quantité

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{i,i} & a_{i,k} & \ldots \\ a_{k,i} & a_{k,k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

étant un déterminant partiel du degré m, dont les éléments sont assujettis aux conditions

$$a_{r,s} = -a_{s,r}, \quad a_{r,r} = 0,$$

et ΣD_m désignant la somme des déterminants qui se déduisent de D_m, en remplaçant les indices $i, k, \ldots$, par toutes les combinaisons m à m des nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$. Pour m impair, D_m est nul (§ III, 9) ; pour m pair, on a (3)

$$D_m = (i, k, \ldots)^2,$$

et par suite ΣD_m est la somme de $\binom{n}{m}$ carrés.

(*) CAYLEY, *loc. cit.* Compar. *Journal de Crelle*, t. L, p. 299.

Exemples :

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix} = z^3 + z\,(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2),$$

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & z & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & z & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & z \end{vmatrix} = z^4 - z^2(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2) + (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})^2.$$

SECONDE PARTIE.

APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS.

§ IX. — *Résolution d'un système d'équations linéaires.*

1. Théorème. — Les n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant données par les n equations

$$\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = u_n; \end{array}$$

si l'on pose

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

et que l'on désigne par $\alpha_{i,k}$ le coefficient de $a_{i,k}$ dans R, on aura

$$Rx_k = u_1\alpha_{1,k} + u_2\alpha_{2,k} + \ldots + u_n\alpha_{n,k} \text{ (*)}.$$

Cette expression se déduit de R par la substitution de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ au lieu de $a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{n,k}$. Le déterminant des coefficients des inconnues s'appelle le *déterminant du système d'équations linéaires* (**).

Démonstration. — En multipliant les équations don-

(*) Cette résolution a été indiquée pour la première fois par Leibniz, puis découverte de nouveau par Cramer (*voir* § I et II).

(**) Jacobi, *Det.*, 7.

nées respectivement par

$$\alpha_{1,k},\ \alpha_{2,k},\ \ldots,\ \alpha_{n,k},$$

et ajoutant les équations obtenues, on obtient pour le coefficient de x_k,

$$a_{1,k}\alpha_{1,k} + a_{2,k}\alpha_{2,k} + \ldots + a_{n,k}\alpha_{n,k} = \mathrm{R},$$

et, pour le coefficient de x_i,

$$a_{1,i}\alpha_{1,k} + a_{2,i}\alpha_{2,k} + \ldots + a_{n,i}\alpha_{n,k} = 0 \ (\S\ \mathrm{III}, 1).$$

2. Si le déterminant du système linéaire s'annule, les inconnues prendront en général des valeurs infinies, c'est-à-dire que les équations données seront incompatibles, et, par suite, qu'elles ne sont pas indépendantes les unes des autres. La contradiction entre les équations données sera levée, si l'on introduit la condition

$$u_1\alpha_{1,k} + u_2\alpha_{2,k} + \ldots + u_n\alpha_{n,k} = 0,$$

qui est vérifiée pour toutes les valeurs de k, puisque les rapports $\alpha_{1,k} : \alpha_{2,k} : \ldots$ sont indépendants de k (§ VII, 5). Alors le système des équations données est indéterminé, et chacune de ces équations peut se déduire des autres.

3. Si les quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ s'annulent, les inconnues s'annuleront aussi en général, c'est-à-dire que les équations données seront incompatibles, et, par suite, qu'elles ne seront pas indépendantes les unes des autres. La contradiction entre les équations données sera levée dans ce cas par la condition que le déterminant R du système linéaire s'annule. L'équation

$$\mathrm{R} = 0$$

s'appelle la *résultante des équations linéaires* $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$ (*).

(*) D'après Bezout, *Histoire de l'Académie de Paris*, 1764, p. 288.

Si la condition $R = 0$ est remplie, le système est indéterminé, et les équations données sont satisfaites par la proportion

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = \alpha_{i,1} : \alpha_{i,2} : \alpha_{i,3} : \ldots \text{ (*)},$$

i désignant un indice quelconque (§ VII, 5). Car, en vertu de l'équation

$$a_{k,1}\alpha_{i,1} + a_{k,2}\alpha_{i,2} + \ldots + a_{k,n}\alpha_{i,n} = 0,$$

qui a lieu, non-seulement pour des valeurs différentes de i et de k (§ III, 1), mais encore, par hypothèse, pour $i = k$, on a, pour chaque valeur de k prise dans la suite $1, 2, \ldots, n$,

$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{k,n}x_n = 0.$$

Exemple. — Les équations

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= 0, & \text{ou}\quad a\,u + b\,v + c &= 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z &= 0, & a_1u + b_1v + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, & a_2u + b_2v + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

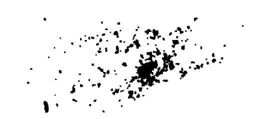
sont compatibles, si l'on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

A cette condition, on a

$$\begin{aligned} x : y : z &= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c & a \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(*) Jacobi, *Det.*, 7.



4. Si les coefficients du système considéré dans l'art. 1 sont tels, que l'on ait

$$a_{i,k} = - a_{k,i}, \quad a_{i,i} = 0,$$

et si n est *pair*, alors, d'après les propositions et les notations du § VIII, on a la solution plus simple

$$\begin{aligned}&(-1)^k(1,2,\ldots,n)\,x_k\\ &= u_1(2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n) + u_2(3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n,1)\\ &\quad + \ldots + u_n(1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1)\ (*).\end{aligned}$$

En effet, en multipliant les équations données respectivement par

$$(2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n),\ (3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n,1),\ldots,\\ (1,\ldots k-1,k+1,\ldots,n-1),$$

et ajoutant les résultats, x_k se trouve avoir pour coefficient

$$a_{1,k}(2,\ldots,n) + a_{2,k}(3,\ldots,n,1) + \ldots + a_{n,k}(1,\ldots,n-1);$$

et la valeur de cette expression, en remplaçant $a_{1,k}$ par $-a_{k,1}$, $a_{2,k}$ par $-a_{k,2}$, etc., peut être représentée par

$$-(k,1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n)$$

(§ VIII, 4). En remplaçant encore l'indice k successivement par $1, 2, \ldots, k-1$, on obtient, pour le coefficient cherché (§ VIII, 2),

$$(-1)^k(1,2,\ldots,n).$$

Au contraire x_i a pour coefficient, dans la somme en question,

$$-(i,1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n),$$

expression identiquement nulle (§ VIII, 2).

(*) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. II, p. 356.

5. Si les coefficients du système linéaire sont tels, que l'on ait

$$a_{i,k} = -a_{k,i}, \quad a_{i,i} = 0,$$

et que n soit *impair*, on a alors $R = 0$ (§ III, 9), et les équations données ne sont compatibles que si l'on a (2)

$$u_1 \alpha_{1,k} + u_2 \alpha_{2,k} + \ldots + u_n \alpha_{n,k} = 0.$$

A cause de l'identité $\alpha_{i,k} = \sqrt{\alpha_{i,i}\,\alpha_{k,k}}$ (§ VII, 5), cette condition se réduit à la suivante,

$$u_1 \sqrt{\alpha_{1,1}} + u_2 \sqrt{\alpha_{2,2}} + \ldots + u_n \sqrt{\alpha_{n,n}} = 0,$$

ou, en substituant la valeur

$$\sqrt{\alpha_{i,i}} = (i+1 \ldots, n, 1, \ldots, i-1) \text{ (§ VIII, 4)},$$

$$u_1 (2, \ldots, n) + u_2 (3, \ldots, n, 1) + \ldots + u_n (1, \ldots, n-1) = 0 \text{ (*)}.$$

Exemple. — Des trois équations

$$\begin{array}{rrr} \star & cy - bz & = f, \\ -cx & \star + az & = g, \\ bx - ay & \star & = h, \end{array}$$

une quelconque est la conséquence des deux autres, si l'on a

$$af + bg + ch = 0 :$$

sinon, chacune est contradictoire avec les deux autres.

Remarque. — Si les coefficients du système linéaire (1) sont tels, que l'on ait $a_{i,k} = \alpha_k^{i-1}$, on obtient encore dans ce cas une solution particulière [*voir* ci-après, § XII, 5, 6].

(*) Jacobi, *loc. cit.*

§ X. — *Théorèmes sur les équations différentielles linéaires.*

1. Les coefficients d'une équation différentielle linéaire de l'ordre n, qui ne contient pas de terme indépendant de la fonction, peuvent, comme Libri l'a remarqué (*), se composer au moyen de n intégrales particulières de l'équation, de la même manière que les coefficients d'une équation algébrique se composent avec ses racines. En effet, si l'on désigne par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des intégrales particulières de l'équation différentielle linéaire

$$0 = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)},$$

$y^{(i)}$ étant le quotient différentiel d'ordre i de la fonction y, et les quantités $a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant indépendantes de $y, y', \ldots$; formons avec les 1ers, 2es, ..., $n^{\text{ièmes}}$ quotients différentiels de $y_1, y_2, \ldots$, le déterminant

$$R_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_{1,1} \cdots y_{1,n-1} \\ y_2 & y_{2,1} \cdots y_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots \\ y_n & y_{n,1} \cdots y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$y_{i,k}$ désignant le $k^{\text{ième}}$ quotient différentiel de y_i. Si l'on désigne maintenant le coefficient de $y_{i,k}$ dans R_n par $\eta_{i,k} = \frac{dR_n}{dy_{i,k}}$ (§ III, 7), on aura

$$-R_n \frac{a_i}{a_n} = y_{1,n}\eta_{1,i} + y_{2,n}\eta_{2,i} + \ldots + y_{n,n}\eta_{n,i} \text{ (**)}.$$

Démonstration. — On a, par hypothèse, pour déter-

(*) *Journal de Crelle*, t. X, p. 189. Les coefficients ont été déterminés par Libri d'une manière moins simple. Libri a bien indiqué la méthode directe pour leur détermination, mais il ne l'a point développée.

(**) Brioschi, *Dét.*, p. 81 (p. 96 de la trad. franç.).

miner les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$, le système d'équations linéaires

$$a_0 y_1 + a_1 y_{1,1} + \ldots + a_{n-1} y_{1,n-1} = - a_n y_{1,n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0 y_n + a_1 y_{n,1} + \ldots + a_{n-1} y_{n,n-1} = - a_n y_{n,n},$$

par la résolution duquel (§ IX, 1) on trouve pour a_i la valeur que nous avons donnée. La détermination des coefficients ne réussit pas, lorsque les intégrales particulières données dépendent les unes des autres, de telle façon que l'on ait $R_n = 0$ (§ IX, 2).

2. Le déterminant R_n peut s'exprimer au moyen des coefficients de $y^{(n-1)}$ et de $y^{(n)}$. On a, d'après les suppositions admises,

$$-R \frac{a_{n-1}}{a_n} = y_{1,n} \eta_{1,n-1} + \ldots + y_{n,n} \eta_{n,n-1}.$$

Le second membre de cette équation a pour valeur $\frac{dR_n}{dx}$ (§ III, 10); on a par conséquent

$$\frac{d \log R_n}{dx} = - \frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \log R_n = - \int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx,$$
$$R_n = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx} \quad (*).$$

3. L'intégration de l'équation linéaire de l'ordre n,

$$(1) \qquad a = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)},$$

$a, a_0, a_1, \ldots$, étant indépendants de $y, y', \ldots$, se réduit à l'intégration d'une équation linéaire de l'ordre $n - m$, lorsque l'on connaît m intégrales particulières de l'équa-

(*) Abel (*Journal de Crelle*, t. II, p. 22) a établi cette relation pour $n = 2$. La formule générale a été attribuée à Liouville par Tissot (*Journal de Liouville*, t. XVII, p. 178).

tion différentielle linéaire plus simple de l'ordre n,

$$0 = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)}. \tag{2}$$

Lagrange (*Miscell. Taur.*, t. III, p. 179) a énoncé ce théorème en 1764, et a montré la possibilité de la réduction. Cette réduction a été traitée par d'Alembert (*loc. cit.*, p. 381) dans une note très-courte, et la méthode exposée dans cette note est identique au fond avec celle du Mémoire de Libri sur le même sujet (*Journal de Crelle*, t. X, p. 185). Après que Malmstén (*Journal de Crelle*, t. XXXIX, p. 91) eut fait voir, à l'aide des déterminants, comment l'intégrale générale de l'équation (2) peut se déduire de $n-1$ intégrales particulières de cette équation, Joachimsthal a traité aussi (*Journal de Crelle*, t. XL, p. 48) la réduction de l'équation différentielle linéaire plus générale (1) d'une manière analogue, au moyen de m intégrales particulières données de l'équation (2). La méthode employée pour cet objet avait déjà été en grande partie indiquée par Lagrange, qui, dans un Mémoire postérieur (*Mémoires de Berlin*, 1775, p. 190), a représenté l'intégrale générale de l'équation (1) au moyen de n intégrales particulières de l'équation (2).

En désignant par y une fonction de x, et par $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les intégrales particulières données de l'équation (2), on peut déterminer un pareil nombre de fonctions de x, que nous désignerons par $b_1, b_2, \ldots, b_m$, par la résolution d'une équation différentielle linéaire générale d'ordre $n-m$, et par m quadratures, de telle sorte que

$$y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

soit l'intégrale générale de l'équation (1). En effet, en posant

$$\frac{d^k y_i}{dx^k} = y_{i,k}, \quad \frac{db_i}{dx} = b_{i,1},$$

on a

$$y' \quad = b_1 y_{1,1} \quad + \ldots + b_m y_{m,1},$$
$$y'' \quad = b_2 y_{1,2} \quad + \ldots + b_m y_{m,2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(m-1)} = b_1 y_{1,m-1} + \ldots + b_m y_{m,m-1},$$

en posant

$$b_{1,1} y_1 \quad + \ldots + b_{m,1} y_m \quad = 0,$$
$$b_{1,1} y_{1,1} \quad + \ldots + b_{m,1} y_{m,1} \quad = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{1,1} y_{1,m-2} + \ldots + b_{m,1} y_{m,m-2} = 0.$$

Mais, d'après les conditions que l'on a posées, les rapports

$$b_{1,1} : b_{2,1} : \ldots$$

sont déjà déterminés (§ IX, 3) ; on a de plus

$$y^{(m)} = b_1 y_{1,m} + \ldots + b_m y_{m,m} + z,$$

en posant

$$b_{1,1} y_{1,m-1} + \ldots + b_{m,1} y_{m,m-1} = z,$$

qui est une fonction déterminée de x. On a de même

$$y^{(m+1)} = b_1 y_{1,m+1} + \ldots + b_m y_{m,m+1} + z' + z_1,$$

en posant

$$b_{1,1} y_{1,m} + \ldots + b_{m,1} y_{m,m} = z_1, \quad \frac{dz}{dx} = z';$$

puis

$$y^{(m+2)} = b_1 y_{1,m+2} + \ldots + b_m y_{m,m+2} + z'' + z_{1,1} + z_2,$$

en posant

$$b_{1,1} y_{1,m+1} + \ldots + b_{m,1} y_{m,m+1} = z_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = z_{1,1},$$

etc. ; et enfin

$$y^{(n)} = b_1 y_{1,n} + \ldots + b_m y_{m,n} + z^{(n-m)} + z_{1,n-m-1} + \ldots$$
$$+ z_{n-m-1,1} + z_{n-m},$$

en posant

$$b_{1,1} y_{1,n-1} + \ldots + b_{m,1} y_{m,n-1} = z_{n-m}.$$

En multipliant ces équations respectivement par a_0, $a_1, \ldots$, et, ajoutant les produits, on trouve, en vertu des suppositions faites sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$,

$$\begin{aligned} a = a_m z + a_{m+1} z' + a_{m+2} z'' &+ \ldots + a_n z^{(n-m)} \\ + a_{m+1} z_1 + a_{m+2} z_{1,1} &+ \ldots + a_n z_{1,n-m-1} \\ + a_{m+2} z_2 &+ \ldots + a_n z_{2,n-m-2} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_n z_{n-m}, \end{aligned}$$

pour la condition en vertu de laquelle

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

sera une intégrale de l'équation (1).

Or, en résolvant le système d'équations

$$\begin{aligned} b_{1,1} y_1 \quad &+ \ldots + b_{m,1} y_m \quad = 0, \\ b_{1,1} y_{1,1} \quad &+ \ldots + b_{m,1} y_{m,1} \quad = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1,1} y_{1,m-2} &+ \ldots + b_{m,1} y_{m,m-2} = 0, \\ b_{1,1} y_{1,m-1} &+ \ldots + b_{m,1} y_{m,m-1} = z, \end{aligned}$$

on trouve

$$b_{i,1} R_m = \eta_{i,m-1} z, \quad b_i = \int \frac{\eta_{i,m-1}}{R_m} z dx,$$

en posant

$$R_m = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_m \\ y_{1,1} & y_{2,1} & \ldots y_{m,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1,m-1} & y_{2,m-1} & \ldots y_{m,m-1} \end{vmatrix}$$

et désignant par

$$\eta_{i,m-1} = \frac{dR_m}{dy_{i,m-1}}$$

le coefficient de $y_{i,m-1}$ dans R_m. Les fonctions $b_1, b_2, \ldots, b_m$ seront ainsi déterminées par des quadratures, après que l'on aura trouvé z. Pour débarrasser maintenant des quantités $b_1, b_2, \ldots$ l'équation qui détermine z, remarquons que

l'on a

$$\begin{aligned}
z_1 &= b_{1,1}\, y_{1,m} + \ldots + b_{m,1}\, y_{m,m} \\
&= (\eta_{1,m-1}\, y_{1,m} + \ldots + \eta_{m,m-1}\, y_{m,m}) \frac{z}{R_m} = c_1 z, \\
z_2 &= b_{1,1}\, y_{1,m+1} + \ldots + b_{m,1}\, y_{m,m+1} \\
&= (\eta_{1,m-1}\, y_{1,m+1} + \ldots + \eta_{m,m-1}\, y_{m,m+1}) \frac{z}{R_m} = c_2 z, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_{n-m} &= b_{1,1}\, y_{1,n-1} + \ldots + b_{m,1}\, y_{m,n-1} \\
&= (\eta_{1,m-1}\, y_{1,n-1} + \ldots + \eta_{m,m-1}\, y_{m,n-1}) \frac{z}{R_m} = c_{n-m} z,
\end{aligned}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}$ étant, par suite, des fonctions données de x. On en tire par différentiation, en se servant d'une notation analogue,

$$\begin{aligned}
z_{i,1} &= c_{i,1} z + c_i z', \\
z_{i,2} &= c_{i,2} z + 2 c_{i,1} z' + c_i z'', \\
z_{i,3} &= c_{i,3} z + 3 c_{i,2} z' + 3 c_{i,1} z'' + c_i z''', \\
&\text{etc.} \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On a par conséquent

$$\begin{aligned}
a = a_m z & \\
+ a_{m+1} & \left\{ c_1 z + z' \right\} \\
+ a_{m+2} & \left\{ \begin{array}{l} c_{1,1} z + c_1 z' + z'' \\ + c_2 z \end{array} \right\} \\
+ a_{m+3} & \left\{ \begin{array}{l} c_{1,2} z + 2 c_{1,1} z' + c_1 z'' + z''' \\ + c_{2,1} z + c_2 z' \\ + c_3 z \end{array} \right\} \\
+ a_{m+4} & \left\{ \begin{array}{l} c_{1,3} z + 3 c_{1,2} z' + 3 c_{1,1} z'' + c_1 z''' + z^{\text{IV}} \\ + c_{2,2} z + 2 c_{2,1} z' + c_2 z'' \\ + c_{3,1} z + c_3 z' \\ + c_4 z \end{array} \right\} \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

pour l'équation linéaire d'ordre $n - m$ à laquelle doit satisfaire la fonction z. Ayant trouvé la valeur de z, on peut calculer ensuite, par son moyen, les fonctions b_1, $b_2, \ldots$, b_m, de telle sorte que

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

soit une intégrale de l'équation (1). Les intégrales particulières $y_1, y_2, \ldots, y_m$ étant supposées habituellement ne contenir aucune constante indéterminée, comme d'ailleurs l'intégrale générale z de l'équation linéaire d'ordre $n - m$ que l'on vient de trouver, renferme $n - m$ constantes arbitraires, et que les quadratures, dans le calcul de $b_1, b_2, \ldots, b_m$, introduisent m autres constantes arbitraires : l'intégrale trouvée pour l'équation (1) contiendra le nombre voulu de constantes arbitraires, et ce sera par conséquent l'intégrale générale de l'équation (1).

4. L'équation différentielle linéaire qu'il reste à résoudre pour l'intégration de l'équation différentielle donnée, n'est pas résoluble en général, lorsqu'elle dépasse le premier ordre. Il y a donc à considérer en particulier les cas où l'on a $m = n$ et $m = n - 1$.

Pour $m = n$, on a

$$a = a_n z, \quad b_{i,1} R_n = \frac{a}{a_n} \eta_{i,n-1}, \quad b_i = \int \frac{a}{a_n} \frac{\eta_{i,n-1}}{R_n} dx,$$

et par suite l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$y = y_1 \int \frac{a}{a_n R_n} \eta_{1,n-1} dx + y_2 \int \frac{a}{a_n R_n} \eta_{2,n-1} dx + \ldots$$
$$+ y_n \int \frac{a}{a_n R_n} \eta_{n,n-1} dx,$$

comme Lagrange et Joachimsthal l'ont remarqué (*l. c.*).

Pour $m = n - 1$, on a

$$a = a_{n-1} z + a_n (c_1 z + z').$$

Or on a (§ III, 10)

$$R_{n-1} c_1 = \eta_{1,n-2} y_{1,n-1} + \ldots + \eta_{n-1,n-2} y_{n-1,n-1} = \frac{dR_{n-1}}{dx};$$

par conséquent

$$a R_{n-1} = a_{n-1} R_{n-1} z + a_n \frac{d(R_{n-1} z)}{dx}.$$

Pour la résolution de cette équation, on a besoin d'une intégrale particulière u_1 de l'équation

$$o = a_{n-1} u + a_n u',$$

savoir,

$$u_1 = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}.$$

En représentant l'intégrale générale qu'il faut d'abord chercher, par

$$R_{n-1} z = u_1 v_1,$$

ce qui donne, d'après la notation admise,

$$(R_{n-1} z)' = u_{1,1} v_1 + u_1 v_{1,1},$$

on a, à cause de $a_{n-1} u_1 + a_n u_{1,1} = o$ (par hypothèse),

$$a R_{n-1} = a_n u_1 v_{1,1}, \quad v_1 = \int \frac{a R_{n-1}}{a_n u_1} dx,$$

$$R_{n-1} z = u_1 \int \frac{a R_{n-1}}{a_n u_1} dx,$$

avec une constante arbitraire. On a enfin, pour déterminer b_i,

$$b_{i,1} R_{n-1} = \frac{u_1 v_1}{R_{n-1}} \eta_{i,n-2},$$

$$b_i = \int \frac{u_1 v_1}{R_{n-1}^2} \eta_{i,n-2} dx,$$

chacune de ces quantités amenant avec elle une constante arbitraire, de sorte que

$$y = b_1 y_1 + \ldots + b_{n-1} y_{n-1}$$

est l'intégrale générale de l'équation (1), comme l'a remarqué Joachimsthal (*l. c.*). Le cas particulier de $a = 0$, pour lequel ν_1 lui-même se change en une constante arbitraire, avait été déjà semblablement traité par Malmstén (*l. c.*).

§ XI. — *Résultante de deux équations algébriques.*

1. Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

Les deux équations

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0,$$

données pour la détermination de x, seront compatibles si une racine au moins de la première équation coïncide avec une racine de la seconde. En désignant les racines de la première équation par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, et les racines de la seconde équation par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$; en désignant, de plus, par $\prod\limits_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$ le produit de toutes les différences entre les racines de la première équation et les racines de la seconde, lesquelles différences se forment de $\alpha_i - \beta_k$, en faisant successivement $i = 1, 2, \ldots, m$, et $k = 1, 2, \ldots, n$, alors

$$\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k) = 0$$

sera la condition nécessaire et suffisante pour la compati-

bilité des équations données (*), et s'appellera la *résultante* de ces équations (§ IX, 3).

2. Si les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, ainsi que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, sont toutes différentes entre elles, le produit $\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$ sera une fonction rationnelle et entière, du degré m, des quantités

$$\frac{b_0}{b_n}, \quad \frac{b_1}{b_n}, \ldots, \quad \frac{b_{n-1}}{b_n},$$

et aussi une fonction rationnelle et entière, du degré n, des quantités

$$\frac{a_0}{a_m}, \quad \frac{a_1}{a_m}, \ldots, \quad \frac{a_{m-1}}{a_m},$$

et par suite aussi une fonction rationnelle, entière et symétrique des racines de $\varphi(x) = 0$, ainsi que des racines de $f(x) = 0$, et l'on sait que cette fonction peut se transformer en une fonction rationnelle et entière des coefficients de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ (**). Car, de l'identité

$$\varphi(x) = b_n(x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n)$$

on tire

$$(\alpha_i - \beta_1)(\alpha_i - \beta_2)\ldots(\alpha_i - \beta_n) = \frac{\varphi(\alpha_i)}{b_n},$$

et par suite

$$\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k) = \frac{1}{b_n^m} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m).$$

(*) EULER, *Histoire de l'Académie de Berlin*, 1748, p. 234.

(**) EULER, *loc. cit.*

On a de même

$$f(x) = (-1)^m a_m (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)\ldots(\alpha_m - x),$$

$$(\alpha_1 - \beta_k)(\alpha_2 - \beta_k)\ldots(\alpha_m - \beta_k) = \frac{(-1)^m}{a_m} f(\beta_k),$$

$$\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k) = \frac{(-1)^{mn}}{a_m^n} f(\beta_1) f(\beta_2)\ldots f(\beta_n),$$

d'où résultent immédiatement les propositions énoncées ci-dessus.

3. Au lieu de développer le produit $\prod\limits_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$ en une suite de fonctions rationnelles, entières et symétriques des racines de l'une des équations données, et d'exprimer ces fonctions au moyen des coefficients de cette même équation, on peut parvenir plus simplement à la résultante des équations données, en éliminant l'inconnue x entre ces équations.

L'équation $R = 0$, obtenue par l'élimination de x entre $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, est la résultante de ces équations (*æquatio finalis genuina*), lorsque R est une fonction rationnelle et entière, du degré m, des quantités indépendantes entre elles

$$\frac{b_0}{b_n}, \quad \frac{b_1}{b_n}, \ldots, \quad \frac{b_{n-1}}{b_n},$$

et une fonction rationnelle et entière, du degré n, des quantités indépendantes entre elles

$$\frac{a_0}{a_m}, \quad \frac{a_1}{a_m}, \ldots, \quad \frac{a_{m-1}}{a_m} \text{ (*)}.$$

(*) EULER, *loc. cit.* — *Voir* CAUCHY, *Exercices d'Analyse*, 1840, p. 400.

Car, pour chaque système de valeurs des coefficients a_0, $a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$, faisant évanouir $\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$, $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune α_r, dont l'élimination entre les équations $f(\alpha_r) = 0$ et $\varphi(\alpha_r) = 0$ a fourni l'équation $R = 0$; c'est-à-dire que, si $\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$ s'annule, R s'annule également. Or ces quantités sont, d'après (2) et les hypothèses précédentes, des fonctions rationnelles et entières, du même degré, de $\frac{b_0}{b_n}, \frac{b_1}{b_n}, \ldots$, ainsi que $\frac{a_0}{a_m}, \frac{a_1}{a_m}, \ldots$ Elles ne peuvent donc différer que par un facteur indépendant des quotients en question.

Si au contraire, dans l'équation $R = 0$ qui résulte de l'élimination des x entre $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, R est une fonction des quantités en question d'un degré différent de celui que nous avons indiqué, cette fonction contiendra alors un facteur étranger, dont l'annulation n'entraîne pas l'existence d'une racine commune aux équations données, ou bien cette fonction s'annulera identiquement.

4. Pour obtenir, par l'élimination de x entre les équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, la résultante de ces équations, Euler (*) et Bezout (**) ont trouvé en même temps une méthode applicable à tous les cas, et qui a été récemment reprise par Sylvester (***) et par Hesse (****). On

(*) *Histoire de l'Académie de Berlin*, 1764, p. 96.

(**) *Histoire de l'Académie de Paris*, 1764, p. 298.

(***) *Philosophical Magazine*, 1840, n° 101. — *Voir* RICHELOT, *Journal de Crelle*, t. XXI, p. 226.

(****) *Journal de Crelle*, t. XXVII, p. 1.

forme pour cela les identités

$$
\begin{array}{l}
f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x f(x) = \quad a_0 x + a_1 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x^2 f(x) = \quad\quad a_0 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{n-1} f(x) = \quad\quad\quad\quad a_0 x^{n-1} + \ldots + a_m x^{m+n-1}, \\
\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x \varphi(x) = \quad b_0 x + b_1 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x^2 \varphi(x) = \quad\quad b_0 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{m-1} \varphi(x) = \quad\quad\quad\quad b_0 x^{m-1} + \ldots + b_n x^{m+n-1}
\end{array}
$$

En désignant par R le déterminant de degré $m+n$ dont les éléments sont, pour les n premières lignes horizontales,

$$
\begin{array}{llllll}
a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_m & 0 & 0 \ldots\ldots \\
0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots a_m & 0 \ldots\ldots \\
0 & 0 & a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots a_m \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & & & & \\
0 & 0 & 0 \ldots a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots a_m,
\end{array}
$$

et pour les m lignes horizontales suivantes,

$$
\begin{array}{llllll}
b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_n & 0 & 0 \ldots\ldots \\
0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots b_n & 0 \ldots\ldots \\
0 & 0 & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots b_n \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & & & & \\
0 & 0 & 0 \ldots b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots b_n;
\end{array}
$$

en désignant de plus par $\gamma_{i-1,k-1}$ le coefficient du $k^{\text{ième}}$ élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne horizontale de R, on a (§ IX, 1),

$$
\begin{array}{l}
R x^i = (\gamma_{0,i} + \gamma_{1,i} x + \ldots + \gamma_{n-1,i} x^{n-1}) f(x) \\
\quad + (\gamma_{n,i} + \gamma_{n+1,i} x + \ldots + \gamma_{m+n-1,i} x^{m-1}) \varphi(x).
\end{array}
$$

Si l'on pose maintenant $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, $R = 0$ sera

la résultante du système précédent d'équations (§ IX, 3). Or le déterminant R, divisé par $a_m^n\, b_n^m$ (§ III, 2), est une fonction rationnelle et entière du degré n par rapport à $\frac{a_0}{a_m}, \frac{a_1}{a_m}, \ldots$, et du degré m par rapport à $\frac{b_0}{b_n}, \frac{b_1}{b_n}, \ldots$, et les facteurs a_m, b_n sont supposés, dans la formation de R, ne pas s'annuler; par conséquent (3) l'équation $R = 0$ est la résultante des équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$.

5. De la manière que l'on vient d'indiquer, on n'obtient pas la résultante des équations données sous la forme la plus simple, parce qu'une grande partie des éléments du déterminant de degré $m + n$ s'évanouissent. Le procédé d'élimination conduisant à la simplification désirée, et employé par Bezout dans le Mémoire cité (p. 317), a été, dans ces derniers temps, repris et éclairci par Jacobi (*) et par Cauchy (**). Des équations données, que l'on suppose d'abord être toutes les deux des équations de degré n, on peut déduire n équations du degré $n - 1$, d'où l'on conclut ensuite, par la formation d'un déterminant de degré n, la résultante des équations données. A cause de

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r + (a_{r+1} + a_{r+2} x + \ldots + a_n x^{n-r-1}) x^{r+1},$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r + (b_{r+1} + b_{r+2} x + \ldots + b_n x^{n-r-1}) x^{r+1},$$

la quantité

$$(b_{r+1} + b_{r+2} x + \ldots + b_n x^{n-r-1}) F(x) - (a_{r+1} + a_{r+2} x + \ldots + a_n x^{n-r-1}) \varphi(x)$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r)(b_{r+1} + b_{r+2} x + \ldots + b_n x^{n-r-1})$$
$$- (b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r)(a_{r+1} + a_{r+2} x + \ldots + a_n x^{n-r-1}),$$

sera une fonction de x du degré $n - 1$, que nous désigne-

(*) *Journal de Crelle*, t. XV, p. 101.
(**) *Exercices d'Analyse*, 1840, p. 393.



rons par u_r. Du système des identités

$$\begin{array}{l} c_{0,0}+c_{0,1}x \quad +\ldots+c_{0,n-1}x^{n-1} \quad = u_0, \\ c_{1,0}+c_{1,1}x \quad +\ldots+c_{1,n-1}x^{n-1} \quad = u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-1,0}+c_{n-1,1}x+\ldots+c_{n-1,n-1}x^{n-1}=u_{n-1}, \end{array}$$

on tire (§ IX, 1)

$$Rx^i = u_0\gamma_{0,i}+u_1\gamma_{1,i}+\ldots+u_{n-1}\gamma_{n-1,i},$$

en supposant

$$R=\begin{vmatrix} c_{0,0} & \ldots c_{0,n-1} \\ \ldots & \ldots \\ c_{n-1,0} & \ldots c_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

et en désignant par $\gamma_{i,k}$ le coefficient de $c_{i,k}$ dans R. Si l'on a maintenant

$$F(x)=0, \quad \varphi(x)=0,$$

il en résulte

$$u_0=0, \quad u_1=0,\ldots, \quad u_{n-1}=0,$$

et par suite $R=0$ sera la résultante de ces dernières équations. Or les éléments $c_{i,k}$ sont des fonctions linéaires tant de $a_0, a_1,\ldots$, que de $b_0, b_1,\ldots$, d'où il suit que le déterminant R est une fonction du degré n des mêmes quantités; donc $R=0$ est la résultante des équations données

$$F(x)=0, \quad \varphi(x)=0.$$

6. L'élément $c_{r,s}$ du déterminant R est le coefficient de x^s dans u_r. Or on a

$$u_r=\left(\sum a_i x^i\right)\left(\sum b_k x^{k-r-1}\right)-\left(\sum b_i x^i\right)\left(\sum a_k x^{k-r-1}\right)$$
$$=\sum (a_i b_k - a_k b_i)\, x^{i+k-r-1},$$

6.

en supposant successivement

$$i = 0, 1, \ldots, r, \quad \text{et} \quad k = r+1, r+2, \ldots, n.$$

En ajoutant la condition

$$i + k - r - 1 = s,$$

et faisant, pour abréger,

$$d_{i,k} = a_i b_k - a_k b_i,$$

on aura

$$c_{r,s} = d_{0,r+s+1} + d_{1,r+s} + \ldots + d_{r-1,s+2} + d_{r,s+1}.$$

Pour $r > s$, les $r - s$ derniers de ces termes s'évanouissent identiquement, savoir

$$d_{s+1,r} + d_{s+n,r-1} + \ldots + d_{r-1,s+2} + d_{r,s+1},$$

puisqu'on a

$$d_{i,k} = -d_{k,i} \quad \text{et} \quad d_{i,i} = 0.$$

Par suite on a

$$c_{r,s} = d_{0,r+s+1} + d_{1,r+s} + \ldots + d_{s,r+1} = c_{s,r} \text{ (*)}.$$

Pour $r + s + 1 > n$, les $r + s + 1 - n$ premiers termes s'évanouissent, parce que, d'après ce qu'on a supposé sur le degré des équations,

$$a_{n+1}, \quad a_{n+2}, \ldots, \quad b_{n+1}, \quad b_{n+2}, \ldots,$$

doivent être considérés comme nuls.

La somme des $r - 1$ premiers termes de $c_{r,s}$ est identique avec $c_{r-1,s+1}$; on a par conséquent la formule

$$c_{r,s} = c_{r-1,s+1} + d_{r,s+1} \text{ (**)},$$

pour le calcul successif des éléments de R.

(*) JACOBI, *loc. cit.*, p. 102.
(**) JACOBI, *loc. cit.*, p. 114.

EXEMPLES. — Pour trouver la résultante des équations

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$
$$0 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$

on formera

$$c_{0,0} = d_{0,1}, \quad c_{0,1} = d_{0,2}, \quad c_{1,1} = d_{1,2},$$

et l'on obtiendra

$$\begin{vmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} \\ d_{0,2} & d_{1,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour trouver la résultante des équations

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$
$$0 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3,$$

on formera

$$c_{0,0} = d_{0,1},$$
$$c_{0,1} = d_{0,2}, \quad c_{1,1} = d_{0,3} + d_{1,2},$$
$$c_{0,2} = d_{0,3}, \quad c_{1,2} = d_{1,3}, \quad c_{2,2} = d_{2,3},$$

et l'on aura

$$\begin{vmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} \\ d_{0,2} & d_{0,3} + d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{0,3} & d_{1,3} & d_{2,3} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour obtenir la résultante des équations

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$
$$0 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 b^4,$$

on formera

$$c_{0,0} = d_{0,1},$$
$$c_{0,1} = d_{0,2}, \quad c_{1,1} = d_{0,3} + d_{1,2},$$
$$c_{0,2} = d_{0,3}, \quad c_{1,2} = d_{0,4} + d_{1,3}, \quad c_{2,2} = d_{1,4} + d_{2,3},$$
$$c_{0,3} = d_{0,4}, \quad c_{1,3} = d_{1,4}, \quad c_{2,3} = d_{2,4}, \quad c_{3,3} = d_{3,4},$$

ce qui donnera

$$\begin{vmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} & d_{0,4} \\ d_{0,2} & d_{0,3}+d_{1,2} & d_{0,4}+d_{1,3} & d_{1,4} \\ d_{0,3} & d_{0,4}+d_{1,3} & d_{1,4}+d_{2,3} & d_{2,4} \\ d_{0,4} & d_{1,4} & d_{2,4} & d_{3,4} \end{vmatrix} = 0.$$

On peut pousser plus loin le développement de ces déterminants, au moyen du § V, 2, et l'on peut se servir pour cela de l'identité

$$d_{i,k}\,d_{l,m} + d_{k,l}\,d_{i,m} + d_{l,i}\,d_{k,m} = 0$$

(§ III, 11). Sous la forme que nous venons d'indiquer, les résultantes des équations de degré élevé sont plus faciles à apercevoir que sous les formes que nous leur avions précédemment données.

7. $R = 0$ étant la résultante des équations

$$F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0,$$

et $\gamma_{r,s}$ désignant toujours le coefficient de $c_{r,s}$ dans R, du système des équations

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \ldots, \; u_{n-1} = 0,$$

il résulte, pour la racine commune x des équations

$$F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0,$$

la proportion (§ IX, 3)

$$1 : x : x^2 : \ldots : x^{n-1} = \gamma_{i,0} : \gamma_{i,1} : \gamma_{i,2} : \ldots : \gamma_{i,n-1},$$

i étant un quelconque des indices $0, 1, \ldots, n-1$. Donc la racine commune des équations données, si toutefois il en existe une, est une *fonction rationnelle* des coefficients qui entrent dans les équations.

Des proportions

$$x^k : x^s = \gamma_{i,k} : \gamma_{i,s},$$
$$x^i : x^r = \gamma_{s,i} : \gamma_{s,r},$$

et de l'identité $\gamma_{s,r} = \gamma_{r,s}$ (§ III, 9), il résulte qu'on a

$$x^{i+k} : x^{r+s} = \gamma_{i,k} : \gamma_{r,s};$$

d'où il s'ensuit, d'une part, que $\gamma_{i,k}$ ne change pas lorsque $i+k$ reste le même, et que l'on peut substituer les quantités $\gamma_{i,k}$, $\gamma_{i-1,k+1}, \ldots$ indifféremment au lieu de $\gamma_{i,k}$; d'autre part, que l'on peut prolonger la proportion précédente jusqu'à la puissance $2n-2$ de x, de sorte que

$$1 : x : x^2 : \ldots : x^{2n-2} = \gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \ldots : \gamma_{2n-2} \text{ (*)}.$$

Les quantités $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2n+2}$ *forment donc une progression géométrique, dont la raison est la racine commune aux équations* $F(x) = 0$ *et* $\varphi(x) = 0$. De là on déduit les relations

$$\gamma_i = \gamma_0 x^i, \quad \gamma_k = \gamma_0 x^k, \quad \gamma_{i+k} = \gamma_0 x^{i+k},$$

et par suite les identités

$$\gamma_i = \gamma_0 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)^i, \quad \gamma_i \gamma_k - \gamma_0 \gamma_{i+k} = 0,$$

dont la dernière s'accorde avec le § VII, 4.

8. Lorsque $f(x)$ est de degré inférieur à $\varphi(x)$, par exemple, lorsque $f(x)$ est du degré m, et $\varphi(x)$ du degré $n = m+p$, la résultante des équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ peut se déduire de celle des équations

$$x^p f(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0.$$

En effet, l'équation $x^p f(x) = 0$, outre les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, a encore p racines nulles; par conséquent (2)

$$\frac{1}{b_n^{m+p}} [\varphi(0)]^p \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_m) = 0$$

(*) JACOBI, *loc. cit.*, p. 106.

est la résultante des équations $x^p f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, tandis que

$$\frac{1}{b_n^m} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m) = 0$$

est la résultante des équations données $f(x)=0$ et $\varphi(x)=0$. Si l'on a donc trouvé, par la méthode de Bezout (5), la résultante $R = 0$ des premières équations, on aura

$$R : \left(\frac{b_0}{b_n}\right)^p = 0$$

pour la résultante des dernières équations données.

Dans ce cas, on peut démontrer que R est divisible par b_0^p (*), à l'aide de la proposition (§ VI, 4) d'après laquelle on a

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & \ldots & c_{0,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,0} & \ldots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{0,0} & \ldots & f_{0,p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{p-1,0} & \ldots & f_{p-1,p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{0,0} & \ldots & g_{0,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n-1,0} & \ldots & g_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

lorsque, pour $r = 0, 1, \ldots, p-1$, on a

$$c_{r,s} = f_{r,0}\, g_{s,0} + f_{r,1}\, g_{s,1} + \ldots + f_{r,p-1}\, g_{s,p-1},$$

et pour $r = p, p+1, \ldots, n-1$,

$$c_{r,s} = g_{s,r}.$$

Pour identifier la fonction $F(x)$ de l'art. 5 avec la fonction $x^p f(x)$ que nous avons à considérer ici, il faut poser

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad \ldots, \quad a_{p-1} = 0.$$

On a, d'après cela, pour $r = 0, 1, \ldots, p-1$ (6),

$$c_{r,s} = -a_{s+1}\, b_r - a_{s+2}\, b_{r-1} - \ldots - a_{r+s+1}\, b_0.$$

(*) ROSENHAIN, *Journal de Crelle*, t. XXVIII, p. 268.

En posant, pour ces valeurs de r,

$$f_{r,i} = -b_{r-i}, \quad g_{s,i} = a_{s+1+i},$$

il vient

$$f_{r,0}\, g_{s,0} + f_{r,1}\, g_{s,1} + \ldots + f_{r,p-1}\, g_{s,p-1} = c_{r,s},$$

$f_{r,r+1}, f_{r,r+2}, \ldots$ devant être considérés comme nuls. En posant, pour les autres valeurs de r,

$$g_{s,r} = c_{r,s} = c_{s,r},$$

on a effectivement

$$\mathrm{R} = \begin{vmatrix} f_{0,0} & \ldots & f_{0,p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{p-1,0} & \ldots & f_{p-1,p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{0,0} & \ldots & g_{0,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n-1,0} & \ldots & g_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -b_0 & 0 & 0 & \ldots \\ -b_1 & -b_0 & 0 & \ldots \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_{p-1} & -b_{p-2} & -b_{p-3} \ldots & -b_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \ldots & 0 & a_p & \ldots a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 \ldots & a_p & a_{p+1} \ldots & a_n & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p & a_{p+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p,0} & c_{p,1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{p,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Le premier de ces déterminants est égal à $(-b_0)^p$ (§ II, 7); l'autre est le déterminant des coefficients des n fonctions suivantes, de degré $n-1$,

$$x^{p-1} f(x), \quad x^{p-2} f(x), \ldots f(x), \quad u_p, \ldots, \quad u_{n-1},$$

les dernières de ces fonctions devant être formées d'après la règle donnée dans l'art. 5. Donc la résultante cherchée des équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ est identique avec la résultante des équations

$$x^{p-1} f(x) = 0, \; x^{p-2} f(x) = 0, \ldots, f(x) = 0, \; u_p = 0, \; \ldots u_{n-1} = 0.$$

Remarque. — En formant, d'après Bezout (*l. c.*, p. 323), au moyen de $x^p f(x)$ et de $\varphi(x)$, comme dans (5), les

fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$, de degré $n-1$; en exprimant ensuite, à l'aide des équations

$$f(x)=0, \quad xf(x)=0, \ldots, \quad x^{p-1}f(x)=0,$$

les quantités $x^m, x^{m+1}, \ldots, x^{n-1}$ sous forme de fonctions de degré $m-1$, et réduisant par là les fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ au degré $m-1$; la résultante des équations

$$u_0=0, \quad u_1=0, \ldots, \quad u_{m-1}=0$$

sera bien du degré m par rapport aux coefficients de $\varphi(x)$; mais elle ne sera pas en général du degré n par rapport aux coefficients de $f(x)$; par conséquent elle sera généralement différente de la résultante des équations

$$f(x)=0 \quad \text{et} \quad \varphi(x)=0.$$

9. Euler a montré, à la fin du Mémoire que nous avons cité plus haut (*), comment on peut trouver les conditions pour que deux équations données, $f(x)=0$ et $\varphi(x)=0$, aient deux ou plusieurs racines communes. Les éliminations qui conduisent à ce but sont plus aisées à apercevoir, lorsqu'on se sert de la méthode indiquée par Lagrange (**).

En désignant par α une racine de l'équation $f(x)=0$, et posant $\varphi(\alpha)=-y$, l'équation résultant de l'élimination de α entre les équations $f(\alpha)=0$ et $\varphi(\alpha)+y=0$, sera du degré m en y (1), et aura autant de racines nulles que $f(x)=0$ et $\varphi(x)=0$ ont de racines communes. Or de la résultante $R=0$ des équations $f(x)=0$ et $\varphi(x)=0$, on déduit la résultante des équations $f(x)=0$ et $\varphi(x)+y=0$, en faisant croître $\varphi(0)=b_0$ de y. En supposant que les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$ soient indépendants les uns des

(*) *Histoire de l'Académie de Berlin*, 1764, p. 64.

(**) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1770. « Réflexions, etc., » art. 12.

autres, et qu'il n'existe ainsi aucune relation entre les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, R devient, lorsqu'on y remplace b_0 par $b_0 + y$,

$$R + \frac{dR}{db_0} y + \frac{1}{2} \frac{d^2 R}{db_0^2} y^2 + \dots$$

Par conséquent

$$0 = R + \frac{dR}{db_0} y + \frac{1}{2} \frac{d^2 R}{db_0^2} y^2 + \dots.$$

sera la résultante des équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) + y = 0$. Les conditions pour que cette équation ait 1, 2, 3, ... racines nulles, et partant aussi, pour que $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ aient une, deux, trois, ... racines communes, sont respectivement

$$R = 0;$$

$$R = 0, \quad \frac{dR}{db_0} = 0;$$

$$R = 0, \quad \frac{dR}{db_0} = 0, \quad \frac{d^2 R}{db_0^2} = 0,$$

etc., ...

dans la supposition que les coefficients de la fonction $\varphi(x)$ soient indépendants entre eux; ou encore,

$$R = 0;$$

$$R = 0, \quad \frac{dR}{da_0} = 0;$$

$$R = 0, \quad \frac{dR}{da_0} = 0, \quad \frac{d^2 R}{da_0^2} = 0,$$

etc...,

dans la supposition que les coefficients de la fonction $f(x)$ soient indépendants entre eux.

§ XII. — *Produit de toutes les différences de plusieurs quantités données.*

1. Pour désigner le produit de toutes les différences que l'on obtient lorsque, étant donnée une suite de n quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on retranche chacune d'elles de toutes les suivantes, nous emploierons la notation

$$\begin{aligned} P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) & \ldots (\alpha_n - \alpha_1) \\ (\alpha_3 - \alpha_2) & \ldots (\alpha_n - \alpha_2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\alpha_n - \alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Ce produit est égal au déterminant de degré n

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \ (*).$$

Démonstration. — Ce déterminant est une fonction rationnelle et entière des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et il s'annule lorsque deux de ces quantités deviennent égales entre elles (§ II, 4) ; il est par suite divisible par le produit $(\alpha_2 - \alpha_1) \ldots$ De plus, le déterminant, comme le produit, sont du degré $\frac{n(n-1)}{2}$ par rapport aux quantités

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n:$$

(*) Cauchy, *Journal de l'École de Polytechnique*, XXVII[e] cahier, p. 48. Le cas particulier

$$(b-a)(c-a)(c-b) = ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a,$$

avait déjà été indiqué par Vandermonde, *Histoire de l'Académie de Paris*, 1771, p. 369. Le théorème précédent a été démontré par Cauchy (*Analyse Algébrique*, t. III, § 2, et Note IV) en développant le produit. *Voir* Jacobi, *Journal de Crelle*, t. XXII, p. 360.

donc le quotient du déterminant divisé par le produit est un nombre indépendant de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et de plus, ce quotient est l'unité, comme on le reconnaît par la comparaison du premier terme du déterminant avec le premier terme du produit.

Tandis que le produit renferme

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

termes, dont plusieurs sont égaux deux à deux et de signes contraires, le déterminant, qui lui est égal, se compose de $1.2.3\ldots n$ termes. En vertu du théorème précédent, on n'a plus à calculer,

dans le cas de 3 quantités, que 6 termes au lieu de 8;
. . . . 4 . . . . 24 . . . . 64;
. . . . 5 . . . . 120 . . . . 1024, etc.

2. Lorsqu'on multiplie le produit de toutes les différences des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ par le produit de toutes les différences des quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, on obtient également un déterminant de degré n. Car on a (§ VI, 3)

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).\,\mathrm{P}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \ldots & \beta_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \beta_n & \ldots & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

en posant

$$c_{i,k} = 1 + \alpha_i \beta_k + \alpha_i^2 \beta_k^2 + \ldots + \alpha_i^{n-1} \beta_k^{n-1} = \frac{1 - \alpha_i^n \beta_k^n}{1 - \alpha_i \beta_k} \;(*),$$

ou encore

$$c_{i,k} = \alpha_1^{i-1} \beta_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1} \beta_2^{k-1} + \ldots + \alpha_n^{i-1} \beta_n^{k-1}.$$

(*) CAUCHY, *Exercices d'Analyse*, t. II, p. 169.

3. On a en particulier

$$[P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

en posant

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + \ldots + \alpha_n^i.$$

Dans ce cas, en effet, l'élément $c_{i,k}$ du déterminant que l'on doit former (2) se réduit à la somme des $(i+k-2)^{\text{ièmes}}$ puissances des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. On a plus généralement

$$\Sigma[P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)]^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix} \; (*),$$

les s_i du second membre ayant la même signification que ci-dessus, et le premier membre comprenant la somme de tous les termes qui se forment du terme initial

$$[P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)]^2,$$

en remplaçant les quantités

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

par m quelconques (différentes entre elles) des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Car on a

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m,1} & \ldots & c_{m,m} \end{vmatrix},$$

(*) CAYLEY, *Journal de Liouville*, t. XI, p. 298, et BORCHARDT, *Journal de Liouville*, t. XII, p. 58.

en supposant

$$c_{i,k} = s_{i+k-2} = \alpha_1^{i-1}\alpha_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1}\alpha_2^{k-1} + \ldots + \alpha_n^{i-1}\alpha_n^{k-1}.$$

Or on a, d'après cette condition (§ VI, 2),

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} \ldots c_{1,m} \\ \ldots\ldots \\ c_{m,1} \ldots c_{m,m} \end{vmatrix} = \sum \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^{m-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \ldots \alpha_2^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 \ldots \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}^2 \right\},$$

le signe de sommation ayant le sens indiqué plus haut.

4. Théorème. — En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ des quantités quelconques; par $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et par $P(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ les mêmes produits que ci-dessus, et de plus par $\prod_{i,k}(\alpha_i - \beta_k)$ le produit de toutes les différences qui se forment de $\alpha_i - \beta_k$ en mettant pour i et k toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$: on a

$$\frac{P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) . P(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{\prod_{i,k}(\alpha_i - \beta_k)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_1 - \beta_2} \cdots & \frac{1}{\alpha_1 - \beta_n} \\ \frac{1}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} \cdots & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{\alpha_n - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_n - \beta_2} \cdots & \frac{1}{\alpha_n - \beta_n} \end{vmatrix} (*).$$

Démonstration. — Désignons le déterminant du second membre par Δ, posons

$$\varphi(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \ldots (z - \beta_n),$$

et multiplions les éléments de la première ligne horizon-

(*) Cauchy, *Exercices d'Analyse*, t. II, p. 154.

tale de Δ par $\varphi(\alpha_1)$, les éléments de la seconde ligne horizontale par $\varphi(\alpha_2)$, et ainsi de suite : le déterminant Δ se changera (§ III, 2) en

$$\Delta \prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k).$$

Les éléments de ce nouveau déterminant sont des fonctions rationnelles et entières, du degré $n - 1$, des quantités données; donc $\Delta \prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$ est une fonction rationnelle et entière du degré $n(n-1)$, des quantités données. Ce déterminant devient identiquement nul, lorsque les éléments de deux lignes parallèles deviennent égaux (§ II, 4) ; donc il est divisible par le produit

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) . P(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Mais ce produit est également une fonction rationnelle et entière, du degré $n(n-1)$, des quantités données; par conséquent, le quotient

$$\frac{\Delta \prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)}{P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) . P(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)}$$

est un nombre indépendant des quantités données, et ce nombre peut s'obtenir par la considération d'un cas particulier.

Si l'on suppose, en effet, les quantités β respectivement égales aux quantités α, alors tous les éléments du déterminant $\Delta \prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$ s'annulent, à l'exception de ceux qui sont situés sur la diagonale qui va du premier au dernier élément. Le déterminant se réduit donc à son terme initial

(§ II, 7), c'est-à-dire, au produit des différences

$$\begin{array}{llll}
\star\ , & \alpha_1-\alpha_2,\ldots, & \alpha_1-\alpha_{n-1}, & \alpha_1-\alpha_n,\\
\alpha_2-\alpha_1, & \star\ ,\ldots, & \alpha_2-\alpha_{n-1}, & \alpha_2-\alpha_n,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_{n-1}-\alpha_1, & \alpha_{n-1}-\alpha_2,\ldots, & \star\ , & \alpha_{n-1}-\alpha_n,\\
\alpha_n-\alpha_1, & \alpha_n-\alpha_2,\ldots, & \alpha_n-\alpha_{n-1}, & \star\ ,
\end{array}$$

que nous désignerons (1) par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)]^2.$$

Il s'ensuit de là que

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

est la valeur constante du quotient cherché.

5. A l'aide du produit $P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, on peut donner une solution spéciale du système particulier suivant d'équations linéaires. Si l'on pose

$$\begin{array}{l}
x_1+x_2+\ldots+x_n=1,\\
x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n=t,\\
x_1\alpha_1^2+x_2\alpha_2^2+\cdots+x_n\alpha_n^2=t^2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_1\alpha_1^{n-1}+x_2\alpha_2^{n-1}+\cdots+x_n\alpha_n^{n-1}=t^{n-1},
\end{array}$$

on a

$$x_i=\frac{(\alpha_1-t)(\alpha_2-t)\ldots(\alpha_{i-1}-t)(\alpha_{i+1}-t)\ldots(\alpha_n-t)}{(\alpha_1-\alpha_i)(\alpha_2-\alpha_i)\ldots(\alpha_{i-1}-\alpha_i)(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\ldots(\alpha_n-\alpha_i)}\ (*).$$

Démonstration. — La résolution ordinaire donne

(*) CAUCHY, *Journal de l'École Polytechnique*, XVII[e] cahier, p. 73.

(§ IX, 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} x_i = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{i-1} & t & \alpha_{i+1} & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \dots & \alpha_{i-1}^{n-1} & t^{n-1} & \alpha_{i+1}^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On en tire, en mettant les premières les $i^{\text{ièmes}}$ lignes de ces déterminants, et appliquant le théorème de l'art. 1,

$$x_i = \frac{P(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)}{P(\alpha_i, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)},$$

d'où il résulte qu'il ne reste plus, au numérateur comme au dénominateur, que les $n-1$ facteurs considérés ci-dessus.

6. Lagrange a donné (*), du système plus général d'équations linéaires

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots x_n &= u_0, \\ x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots x_n\alpha_n &= u_1, \\ x_1\alpha_1^2 + x_2\alpha_2^2 + \dots x_n\alpha_n^2 &= u_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_1\alpha_1^{n-1} + x_2\alpha_2^{n-1} + \dots x_n\alpha_n^{n-1} &= u_{n-1}, \end{aligned}$$

la solution suivante, qui renferme le cas considéré par Cauchy (5). Formons la fonction

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n) \\ &= C_n + C_{n-1}z + C_{n-2}z^2 + \dots + C_1 z^{n-1} + z^n, \end{aligned}$$

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1775, p. 185; 1792, p. 248, sans démonstration. La démonstration que nous donnons ici fait voir que la solution du système en question trouvée par SCHEIBNER (*Comptes rendus de la Société Saxonne*, 1856, p. 65) ne diffère pas de la solution de Lagrange.

d'où nous déduirons les fonctions

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(z) &= C_{n-1} + C_{n-2}z + \ldots + C_1 z^{n-2} + z^{n-1}, \\
f_{n-2}(z) &= C_{n-2} + \ldots + C_1 z^{n-3} + z^{n-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_1(z) &= C_1 + z, \\
f_0(z) &= 1,
\end{aligned}$$

et de plus enfin la fonction dérivée $f'(z)$. On aura

$$x_i f'(\alpha_i) = u_0 f_{n-1}(\alpha_i) + u_1 f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + u_{n-2} f_1(\alpha_i) + u_{n-1}.$$

Démonstration. — En multipliant $f_{n-1}(z), f_{n-2}(z), \ldots$ respectivement par $1, t, t^2, \ldots$, et ajoutant les produits, C_{n-k} aura dans la somme pour coefficient

$$z^{k-1} + z^{k-2}t + \ldots + zt^{k-2} + t^{k-1} = \frac{z^k - t^k}{z - t},$$

d'où il suit que l'on a

$$f_{n-1}(z) + tf_{n-2}(z) + t^2 f_{n-3}(z) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(z) - f(t)}{z - t}.$$

De cette identité résulte le système des équations

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(z) + \alpha_1 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_1^{n-1} &= \frac{f(z)}{z - \alpha_1}, \\
f_{n-1}(z) + \alpha_2 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_2^{n-1} &= \frac{f(z)}{z - \alpha_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{n-1}(z) + \alpha_n f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_n^{n-1} &= \frac{f(z)}{z - \alpha_n}.
\end{aligned}$$

Multipliant ces équations respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et faisant la somme des produits, il vient, en vertu des équations données,

$$\begin{aligned}
&u_0 f_{n-1}(z) + u_1 f_{n-2}(z) + \ldots + u_{n-1} \\
&= f(z)\left\{ \frac{x_1}{z - \alpha_1} + \frac{x_2}{z - \alpha_2} + \cdots + \frac{x_n}{z - \alpha_n} \right\}.
\end{aligned}$$

On voit par là que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont autre chose que les numérateurs des fractions partielles dans lesquelles peut se décomposer la fonction fractionnaire

$$\frac{u_0 f_{n-1}(z) + u_1 f_{n-2}(z) + \ldots + u_{n-1}}{f(z)}.$$

Ces numérateurs sont, comme on sait,

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}, \quad \frac{\varphi(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)}, \ldots, \quad \frac{\varphi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)},$$

$\varphi(z)$ représentant le numérateur de la fonction fractionnaire.

Si l'on a, en particulier, $u_0 = 1$, $u_1 = t$, $u_2 = t^2, \ldots,$ il vient

$$\varphi(z) = \frac{f(t) - f(z)}{t - z},$$

$$\varphi(\alpha_i) = \frac{f(t)}{t - \alpha_i},$$

ce qui s'accorde avec (5).

7. La résultante du système analogue de $n+1$ équations linéaires, pour les mêmes n inconnues,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= u_0, \\ x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n &= u_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_1\alpha_1^n + x_2\alpha_2^n + \cdots + x_n\alpha_n^n &= u_n, \end{aligned}$$

est, d'après le § IX, 3,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} u_0 & 1 & \ldots & 1 \\ u_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ u_2 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Cette même résultante se simplifie, en remarquant que

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)=z^n+C_1z^{n-1}+C_2z^{n-2}+\ldots+C_n,$$

C_m désignant la somme, prise avec le signe $(-1)^m$, des produits m à m des quantités différentes de la suite α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$; et que, par suite,

$$C_n+C_{n-1}\alpha_i+C_{n-2}\alpha_i^2+\ldots+C_1\alpha_i^{n-1}+\alpha_i^n$$

s'évanouit identiquement. En multipliant donc les équations données respectivement par

$$C_n,\ C_{n-1},\ldots,\ C_2,\ C_1,\ 1,$$

et faisant la somme des produits, on trouve, pour la résultante de ces équations,

$$(2)\qquad C_nu_0+C_{n-1}u_1+\ldots+C_2u_{n-2}+C_1u_{n-1}+u_n+0.$$

En comparant les coefficients de u_i dans les équations (1) et (2), on obtient l'identité

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{i-1} & \ldots & \alpha_n^{i-1} \\ \alpha_1^{i+1} & \ldots & \alpha_n^{i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}C_{n-i}P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$

8. Une fonction entière, homogène, du degré m, de

deux variables x, y,

$$\sum_r a_r \binom{m}{r} x^{m-r} y^r,$$

r devant recevoir les valeurs 0, 1, 2..., m, et $\binom{m}{r}$ désignant le $r^{\text{ième}}$ coefficient binomial relatif à l'exposant m, peut en général, pour m impair, se ramener à la forme

$$\sum_i (p_i x + q_i y)^m,$$

où i doit recevoir les valeurs 1, 2,... $\frac{m+1}{2}$ (*). Car les $m+1$ coefficients $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ peuvent, en général, se déterminer complétement au moyen des quantités données $a_0, a_1, \ldots$. Au contraire, pour m pair, en faisant $i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}+1$, l'un des $m+2$ coefficients $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ resterait indéterminé.

Pour réduire la fonction

$$a_0 x^{2n-1} + a_1 \binom{2n-1}{1} x^{2n-2} y + \ldots + a_{2n-2} \binom{2n-1}{2n-2} x y^{2n-2} + a_{2n-1} y^{2n-1}$$

à la forme

$$(p_1 x + q_1 y)^{2n-1} + (p_2 x + q_2 y)^{2n-1} + \ldots + (p_n x + q_n y)^{2n-1},$$

posons, d'après Sylvester (*loc. cit.*),

$$q = p_i \alpha_i, \quad p_i^{2n-1} = b_i;$$

(*) Sylvester (*Philosophical Magazine*, 1851, t. II, p. 391) a donné à cette expression le nom de *forme canonique*. La forme canonique d'une fonction homogène entière de deux variables a été étudiée avec de plus grands développements par Sylvester, (*loc. cit.*, et *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. IX, p. 93).

nous aurons les conditions

$$
\begin{aligned}
a_0 &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n,\\
a_1 &= b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + b_n\alpha_n,\\
a_2 &= b_1\alpha_1^2 + b_2\alpha_2^2 + \ldots + b_n\alpha_n^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{2n-1} &= b_1\alpha_1^{2n-1} + b_2\alpha_2^{2n-1} + \ldots + b_n\alpha_n^{2n-1}.
\end{aligned}
$$

En éliminant les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ entre la première de ces équations et les n suivantes, on a (7)

$$C_n a_0 + C_{n-1} a_1 + \ldots + C_2 a_{n-2} + C_1 a_{n-1} + a_n = 0.$$

On tire de même, de la seconde de ces équations et des n suivantes, et ainsi de suite, les nouvelles équations

$$
\begin{aligned}
&C_n a_1 + C_{n-1} a_2 + \ldots + C_2 a_{n-1} + C_1 a_n + a_{n+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_n a_{n-1} + C_{n-1} a_n + \ldots + C_2 a_{2n-3} + C_1 a_{2n-2} + a_{2n-1} = 0.
\end{aligned}
$$

D'ailleurs, en donnant à z une des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on a

$$C_n + C_{n-1} z + \ldots + C_2 z^{n-2} + C_1 z^{n-1} + z^n = 0.$$

La résultante de ces $n+1$ équations, linéaires par rapport à $C_n, C_{n-1}, \ldots$, est (§ IX, 3)

$$
\begin{vmatrix}
1 & z & z^2 & \ldots & z^n\\
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n\\
a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Par la résolution de cette équation, on trouve les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Le premier membre de cette équation peut

(§ III, 4) se transformer en

$$\begin{vmatrix} 1, & z-z, & \ldots, & z^n & -z^n \\ a_0, & a_1-a_0 z, & \ldots, & a_n & -a_{n-1} z \\ a_1, & a_2-a_1 z, & \ldots, & a_{n+1} & -a_n z \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}, & a_n-a_{n-1} z, & \ldots, & a_{2n-1} & -a_{2n-2} z \end{vmatrix},$$

et par suite (§ II, 5) en

$$\begin{vmatrix} a_1-a_0 z, & \ldots, & a_n & -a_{n-1} z \\ a_2-a_1 z, & \ldots, & a_{n+1} & -a_n z \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-a_{n-1} z, & \ldots, & a_{2n-1} & -a_{n-2} z \end{vmatrix}.$$

Après avoir déterminé $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on obtient les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ au moyen des n premières équations du système posé ci-dessus, art. 6, et là on trouve, pour condition nécessaire de la réductibilité de la fonction donnée, que les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de l'équation précédente doivent être toutes différentes les unes des autres.

9. Si l'on pose

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

et que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient les racines de l'équation $f(x) = 0$, alors, d'après le § XI, 1,

$$\prod_{i,k} (\alpha_i - \alpha_k) = 0,$$

i et k étant des nombres différents de la suite $1, 2, \ldots, n$, sera la condition nécessaire et suffisante pour que deux quelconques des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient égales entre elles. Le produit de toutes les différences, positives et négatives, des racines, produit que l'on peut représenter (3)

par

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

a été appelé récemment le *déterminant de l'équation* $f(x) = 0$ (*), parce que sa valeur nulle indique l'existence de racines égales dans l'équation, et que, lorsqu'il n'est pas nul, on peut décider, d'après son signe, si, parmi les carrés des différences des racines, il y en a un nombre pair ou un nombre impair qui sont négatifs, c'est-à-dire si l'équation a un nombre pair ou un nombre impair de couples de racines complexes.

10. Pour représenter le déterminant de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme d'une fonction rationnelle des quantités

$$\frac{a_0}{a_n}, \quad \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

on peut exprimer, au moyen des quantités données, les sommes des premières, des deuxièmes, des troisièmes,... puissances des racines, c'est-à-dire, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (**), où l'on peut transformer le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

de telle sorte que les relations établies par Newton (***)

(*) GAUSS, *Demonstr. nova altera*, 6 (Comm. Gœtt., vol. III).

(**) Au moyen des formules données par Girard, en 1629. *Voir* KLÜGEL, *Dictionnaire de Mathématiques*, art. ALGÈBRE, p. 56.

(***) *Arithmétique universelle*, éd. S'Gravesande, p. 19?.

entre s_0, s_1, s_2, ... conduisent à l'élimination de ces dernières quantités. Pour employer ce dernier moyen, changeons le déterminant donné, de degré n, dans le déterminant suivant, de degré $2n-2$ (§ II, 6),

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & & & 0 \\ \dots & & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_0 & s_1 \dots & s_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_0 & s_1 & s_2 \dots & s_n \\ \dots & & & & & & & \dots \\ 0 & s_0 & s_1 & \dots & & & & s_{2n-4} \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & & & & s_{2n-3} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & & & & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Ajoutons maintenant, à la seconde ligne verticale, le produit de la première ligne verticale par $\frac{a_{n-1}}{a_n}$; à la troisième ligne verticale, le produit de la seconde par $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et celui de la première par $\frac{a_{n-2}}{a_n}$; à la quatrième ligne verticale, le produit de la troisième par $\frac{a_{n-1}}{a_n}$, celui de la deuxième par $\frac{a_{n-2}}{a_n}$, et celui de la première par $\frac{a_{n-3}}{a_n}$; et ainsi de suite. On a ainsi

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{n-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_n \\ \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n \dots s_{2n-2} \end{vmatrix} a_n^{2n-2} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots \\ 0 & 0 & a_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & \dots \\ a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 & \dots \\ a_n s_1 & a_n s_2 + a_{n-1} s_1 & a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 & \dots \end{vmatrix}$$

A l'aide des identités

$$\begin{aligned}
n a_n &= a_n s_0, \\
(n-1) a_{n-1} &= a_n s_1 + a_{n-1} s_0, \\
(n-2) a_{n-2} &= a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0, \\
(n-3) a_{n-3} &= a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 + a_{n-3} s_0, \\
&\text{etc.}, \ldots,
\end{aligned}$$

les éléments du dernier déterminant peuvent s'exprimer de telle sorte que, dans chaque élément, il n'entre qu'un seul des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ à la première puissance.

On reconnaît ainsi que le déterminant de l'équation $f(x) = 0$ est une fonction rationnelle et entière, du degré $2n - 2$, des quantités

$$\frac{a_0}{a_n}, \quad \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

qui devient homogène en la multipliant par a_n^{2n-2} (*).

11. Si $f(x)$ est divisible par $(x - \alpha_k)^k$, la fonction dérivée $f'(x)$ sera divisible par $(x - \alpha_k)^{k-1}$, $f''(x)$ le sera par $(x - \alpha_k)^{k-2}$, et ainsi de suite. Par conséquent, lorsque α_k sera une racine du degré de multiplicité k de l'équation $f(x) = 0$, les équations

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(k-1)}(x) = 0$$

auront la racine commune α_k, qui entrera $k - 1$ fois dans $f'(x) = 0$, $k - 2$ fois dans $f''(x) = 0$, etc.

En supposant maintenant que $f''(x)$ ne s'évanouisse pas en même temps que $f(x)$ et $f'(x)$, soit $R = 0$ la résultante des équations $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$; R ne différera du déterminant de l'équation $f(x) = 0$ que par un facteur indépen-

(*) Cette remarque a été faite en partie par Joachimsthal, *Journal de Crelle*, t. XXXIII, p. 371, puis complétée par Jacobi, *Journal de Crelle*, t. XL, p. 244.

dant de $\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$. La quantité R est, en effet, une fonction rationnelle et entière des quantités

$$\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

et elle est d'un degré inférieur à $2n-1$, parce que, en vertu des équations données $f(x)=0$ et $f'(x)=0$, les coefficients de $f(x)$ ne sont pas indépendants entre eux (*voir* § XI, 2-4). Mais on peut considérer $R=0$ comme la résultante des équations de degré $n-1$,

$$f'(x)=0, \quad nf(x)-xf'(x)=0,$$

puisque $f(x)$ s'annule nécessairement en même temps que $f'(x)$ et $nf(x)-xf'(x)$. Les coefficients de chacune de ces dernières équations sont indépendants entre eux; donc R est une fonction rationnelle et entière du degré $n-2$ (§ XI, 4), des quantités

$$\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Le déterminant de l'équation $f(x)=0$ est également une fonction rationnelle et entière des quantités

$$\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

et du degré $2n-2$ (10). Actuellement le déterminant de l'équation $f(x)=0$ ne peut s'annuler sans que deux racines de l'équation $f(x)=0$ ne soient égales entre elles, ou que les équations $f(x)=0$ et $f'(x)=0$ n'aient une racine commune, ou que R ne s'annule. Donc le déterminant de l'équation $f(x)=0$ ne peut différer de R que par un facteur indépendant des rapports des coefficients de $f(x)$.

En réalité, le procédé indiqué dans l'art. 10 pour la formation du déterminant de l'équation $f(x)=0$ coïncide

entièrement avec la méthode par laquelle Euler et Bezout ont formé la résultante des équations

$$f'(x) = 0, \quad nf(x) - xf'(x) = 0$$

(§ XI), 4. En appliquant la méthode abrégée d'élimination de Bezout (§ XI, 5), on trouve le déterminant cherché sous une forme plus concise. Les formes particulières que l'on a établies pour les déterminants des équations de degrés particuliers, se trouvent dans un Mémoire de Tortolini (*Annali di Sc. matem.* Roma, novembre 1855).

12. Au lieu de la fonction $f(x)$, on peut considérer la fonction homogène

$$\varphi(x, y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} x + \ldots + a_{n-1} y x^{n-1} + a_n x^n,$$

ou

$$\varphi(x, y) = b_0 y^n + \binom{n}{1} b_1 y^{n-1} x + \binom{n}{2} b_2 y^{n-2} x^2 + \ldots + b_n x^n,$$

qui est identique avec $f(x)$ pour $y = 1$ (*). Les coefficients binomiaux ont été donnés comme facteurs aux coefficients de la fonction, afin que l'égalité de toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ ou $\varphi(x, y) = 0$ ait lieu dans le cas où

$$b_0, \; b_1, \; b_2, \; \ldots, \; b_n$$

forment une progression géométrique. En remplaçant $f(x)$ par $\varphi(x, 1)$, on a, au lieu de $f'(x)$,

$$\frac{d\varphi(x, 1)}{dx},$$

(*) Cet important artifice d'analyse a été employé par Plücker, *Syst. der analyt. geom.*, § 1, 7; par Hesse, *Journal de Crelle*, t. XXVIII, p. 102; par Joachimsthal, *Journal de Crelle*, t. XXXIII, p. 373; par Jacobi, *Journal de Crelle*, t. XL, p. 247, et par d'autres; et pour l'objet actuel, par Salmon, *Higher plane curves*, p. 296.

et comme, d'après le théorème d'Euler, on a

$$n\varphi(x, y) = x\frac{d\varphi(x, y)}{dx} + y\frac{d\varphi(x, y)}{dy},$$

il viendra, au lieu de $nf(x) - xf'(x)$,

$$\frac{d\varphi(x, 1)}{dy},$$

où l'on fait $y = 1$ après la différentiation. Si $R = 0$ est la résultante des équations

$$\frac{d\varphi(x, 1)}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi(x, 1)}{dy} = 0,$$

alors, d'après (11), R sera, à cela près d'un certain facteur numérique, le déterminant de l'équation $\varphi(x, 1) = 0$ (*).

On trouve, d'une manière analogue, pour l'égalité de trois racines, au lieu des conditions $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, les conditions

$$\frac{d^2\varphi(x, 1)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\varphi(x, 1)}{dxdy} = 0, \quad \frac{d^2\varphi(x, 1)}{dy^2} = 0;$$

pour l'égalité de quatre racines,

$$\frac{d^3\varphi(x, 1)}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^3\varphi(x, 1)}{dx^2dy} = 0, \quad \frac{d^3\varphi(x, 1)}{dxdy^2} = 0, \quad \frac{d^3\varphi(x, 1)}{dy^3} = 0;$$

et ainsi de suite.

13. Le déterminant de l'équation $f(x) = 0$ est le terme connu de l'équation dont les racines sont les différences entre les racines de l'équation donnée (**).

(*) Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les quotients différentiels partiels de la fonction homogène u, de n variables; si $R = 0$ est la résultante des équations $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$, R sera ce que Sylvester appelle le *discriminant* de la fonction homogène (*Philosophical Magazine*, 1851, t. II, p. 406).

(**) Cette équation, connue sous le nom d'*équation aux carrés des différences*, a été employée par Waring (*Misc. analyt.*, 1762), dans la recher-

Si x prend, en vertu de l'équation $f(x) = 0$, les valeurs

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_n,$$

u prendra, en vertu de l'équation $f(x+u) = 0$, les valeurs

$$\alpha_1 - x, \quad \alpha_2 - x, \ldots, \quad \alpha_n - x.$$

D'après cela, en vertu des deux équations $f(x+u) = 0$ et $f(x) = 0$, u prendra toutes les valeurs qui se déduisent de $\alpha_i - \alpha_k$, en remplaçant i et k par tous les nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$. Si l'on désigne maintenant par $V(u) = 0$ la résultante des équations $f(x) = 0$ et $f(x+u) = 0$, $V(u)$ sera une fonction rationnelle et entière de u, du degré n^2 (§ XI, 2), puisque les coefficients de x dans $f(x+u)$ atteignent et ne surpassent pas le degré n par rapport à u. $V(u)$ s'annule lorsqu'on donne à u une des n^2 valeurs $\alpha_i - \alpha_k$; par conséquent $V(u) = 0$ est l'équation cherchée aux différences des racines $f(x) = 0$.

La différence $\alpha_i - \alpha_k$ étant nulle pour $i = k$, l'équation $V(u) = 0$ aura n racines nulles, et par suite $V(u)$ sera divisible par u^n. Les autres racines de cette équation sont en général différentes de zéro, et opposées deux à deux; donc

$$\frac{V(u)}{u^n}$$

est une fonction paire de u du degré $n(n-1)$, ou une fonction de u^2 du degré $\frac{n(n-1)}{2}$.

---

che des racines d'une équation donnée. Dans les *Transactions philosophiques*, 1763, p. 294, Waring a fait connaître, sans démonstration, les équations aux différences des racines des équations du 4e et du 5e degré, avec les caractères qui en résultent pour la réalité des racines de ces dernières équations. L'équation aux différences des racines d'une équation donnée a été traitée avec développement par Lagrange (*Histoire de l'Académie de Berlin*, 1767, p. 311, art. 8, et *Résolution des équations numériques*, art. 8 et 96).

Comme on a, par le théorème de Taylor,

$$f(x+u)=f(x)+uf'(x)+\frac{u^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$=f(u)+xf'(u)+\frac{x^2}{1.2}f''(u)+\ldots,$$

$V(u)=0$ est évidemment la résultante des équations

$$0=f(x),$$
$$0=f(u)+xf'(u)+\frac{x^2}{1.2}f''(u)+\ldots+a_n x^n,$$

et

$$\frac{V(u)}{u^n}=0$$

la résultante des équations

$$0=f(x),$$
$$0=f'(x)+\frac{u}{1.2}f''(x)+\frac{u^2}{1.2.3}f'''(x)+\ldots+a_n u^{n-1}.$$

En faisant, dans cette dernière, $u=0$, on obtient la résultante des équations $f(x)=0$ et $f'(x)=0$, c'est-à-dire la condition pour que deux racines au moins de l'équation $f(x)=0$ soient égales entre elles (11).

§ XIII. — *Des déterminants fonctionnels.*

1. Etant données n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et $f_{i,k}$ désignant la dérivée partielle de f_i par rapport à la variable x_k, de sorte que

$$f_{i,k}=\frac{df_i}{dx_k},$$

le déterminant de degré n,

$$R=\begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \ldots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \ldots & f_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \ldots & f_{n,n} \end{vmatrix}$$

s'appelle le *déterminant du système des fonctions données* ou le *déterminant fonctionnel du système* (*). Ce déterminant se réduit à un déterminant de degré inférieur, lorsque, par exemple, f_1 ne dépend que de x_1, f_2 que de x_1 et de x_2 (§ II, 5). Le déterminant fonctionnel se réduit à son terme initial, lorsque f_1 est une fonction de x_1, f_2 une fonction de x_1 et de x_2, f_3 une fonction de x_1, de x_2 et de x_3, et ainsi de suite (§ II, 7).

2. Soit f_1 une des n fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dans laquelle la variable x_1 ne manque pas : alors x_1 est une fonction déterminée de $f_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit f_2 une des fonctions restantes, dans laquelle la variable x_2 ne manque pas, après que x_1 a été exprimée au moyen de $f_1, x_2, \ldots, x_n$: alors x_2 est une fonction déterminée de $f_1, f_2, x_3, \ldots, x_n$. Soit f_3 une des fonctions restantes, dans laquelle la variable x_3 ne manque pas, après que x_1 a été exprimée au moyen de $f_1, x_2, \ldots, x_n$, et x_2 au moyen de $f_1, f_2, x_3, \ldots, x_n$: alors x_3 est une fonction déterminée de $f_1, f_2, f_3, x_4, \ldots, x_n$. Et ainsi de suite. D'après cela, on peut considérer, quoique en général implicitement,

f_1 comme fonction de $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots, x_n$,
f_2 . . . . de $f_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots, x_n$,
f_3 . . . . de $f_1,\ f_2,\ x_3, \ldots\ldots, x_n$,
. . . .
f_n . . . . de $f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots, f_{n-1},\ x_n$.

En entourant de parenthèses les dérivées partielles des fonctions ainsi transformées, pour les distinguer des dérivées partielles des fonctions données, on obtient le déterminant fonctionnel du système proposé sous la forme du produit

$$\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)\left(\frac{df_2}{dx_2}\right)\cdots\left(\frac{df_n}{dx_n}\right) \ (^{**}),$$

(*) JACOBI, *De determinantibus functionalibus* (*Journal de Crelle*, t. XXII, p. 319), § 5.

(**) JACOBI, *Det. funct.*, § 8.

$\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)$ n'étant pas différent de $\frac{df_1}{dx_1}$, tandis que $\left(\frac{df_2}{dx_2}\right)$ diffère de $\frac{df_2}{dx_2}$ en ce que f_2 est considéré, dans le premier cas, comme une fonction de $f_1, x_2, \ldots, x_n$, et dans le second, comme une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; et ainsi de suite.

Démonstration. — D'après la supposition faite sur f_i, on a

$$\frac{df_i}{dx_k} = \left(\frac{df_i}{df_1}\right)\left(\frac{df_1}{dx_k}\right) + \left(\frac{df_i}{df_2}\right)\left(\frac{df_2}{dx_k}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{df_i}{df_{i-1}}\right)\left(\frac{df_{i-1}}{dx_k}\right) + \left(\frac{df_i}{dx_k}\right).$$

On a donc (§ VI, 1)

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dx_1} \cdots \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots \\ \left(\frac{df_2}{df_1}\right) & 1 & 0 \ldots \\ \left(\frac{df_3}{df_1}\right) & \left(\frac{df_3}{df_2}\right) & 1 \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \left(\frac{df_1}{dx_1}\right) & 0 & 0 & \ldots \\ \left(\frac{df_1}{dx_2}\right) & \left(\frac{df_2}{dx_2}\right) & 0 & \ldots \\ \left(\frac{df_1}{dx_3}\right) & \left(\frac{df_2}{dx_3}\right) & \left(\frac{df_3}{dx_3}\right) & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Les deux derniers déterminants se réduisent à leurs termes initiaux (§ II, 7); l'un a pour valeur l'unité, l'autre est égal au produit ci-dessus.

3. Théorème. — Si le déterminant R du système de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ s'annule identiquement, les fonctions données ne sont pas indépendantes les unes des autres, et réciproquement (*).

Démonstration. — Si le déterminant R s'évanouit identiquement, il faut qu'un des facteurs du produit (2)

$$\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)\left(\frac{df_2}{dx_2}\right)\cdots\left(\frac{df_n}{dx_n}\right),$$

(*) Jacobi, *Det. funct.*, §§ 6 et 7.

s'annule identiquement. Or les quantités

$$\left(\frac{df_1}{dx_1}\right), \quad \left(\frac{df_2}{dx_2}\right), \ldots, \quad \left(\frac{df_{n-1}}{dx_{n-1}}\right),$$

sont, en général, différentes de zéro, puisque, par hypothèse (2), f_1 contient la variable x_1, f_2 la variable $x_2, \ldots$. Il faut donc que ce soit

$$\left(\frac{df_n}{dx_n}\right)$$

qui s'annule identiquement, c'est-à-dire que la dernière fonction f_n doit pouvoir s'exprimer indépendamment de x_n, au moyen de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ seulement. Mais il peut aussi se faire que x_{n-1} et x_n n'entrent dans aucune des deux dernières fonctions, après que l'on a exprimé la variable x_1 au moyen de $f_1, x_2, \ldots, x_n$; la variable x_2 au moyen de f_1, f_2, $x_3 \ldots, x_n, \ldots$, et enfin la variable x_{n-2} au moyen de $f_1, \ldots, f_{n-2}, x_{n-1}, x_n$. Dans ce cas, la quantité

$$\left(\frac{df_{n-1}}{dx_{n-1}}\right)$$

doit aussi s'annuler identiquement, c'est-à-dire que chacune des deux dernières fonctions f_{n-1}, f_n doit pouvoir s'exprimer indépendamment de x_{n-1}, x_n, au moyen de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$ seulement. Et ainsi de suite.

Réciproquement, si les fonctions données ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais que f_n, par exemple, soit exprimable en $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ seulement, sans x_n, alors $\left(\frac{df_n}{dx_n}\right)$ est identiquement nul, et par suite il en est de même de R.

Cas particuliers. — Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions *linéaires* de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le déterminant de leur système ne diffère pas de celui des équations linéaires (§ IX, 1)

$$f_1 = u_1, \quad f_2 = u_2, \ldots, \quad f_n = u_n.$$

Dans le cas où ce déterminant s'annule, l'une des fonctions données est exprimable au moyen des autres, en vertu d'une équation linéaire de la forme

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0,$$

et les équations données ne sont pas indépendantes entre elles (§ IX, 2).

Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ désignent les dérivées partielles d'une fonction F, le déterminant fonctionnel R n'est autre chose que le déterminant des dérivées partielles du second ordre de F, et a été appelé par Hesse (*Journal de Crelle*, t. XXVIII, p. 83), pour abréger, le *déterminant* de F. Le même déterminant fonctionnel a été nommé par Sylvester (*Cambr. and Dublin math. Journal*, t. VI, p. 186) le *Hessien* (Hessian) de F. Lorsque, en particulier, les dérivées partielles de F sont liées par une équation linéaire de la forme

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0,$$

le déterminant de F s'évanouit identiquement; et par la substitution linéaire

$$x_1 = b_{1,1} y + \ldots + b_{1,n-1} y_{n-1} + c_1 y_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = b_{n,1} y_1 + \ldots + b_{n,n-1} y_{n-1} + c_n y_n,$$

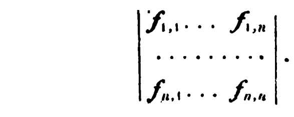
F se change en une fonction des variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, à cause de

$$\frac{dF}{dy_n} = f_1 \frac{dx_1}{dy_n} + \ldots + f_n \frac{dx_n}{dy_n} = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0.$$

Voir Hesse, *Journal de Crelle*, t. XLII, p. 117.

4. Soit U une fonction donnée des quantités $f_1, f_2, \ldots, f_n$, chacune de celles-ci étant une fonction donnée des quan-

tités $x_1, x_2, \ldots, x_n$; soit, de plus, R le déterminant fonctionnel



$$\begin{vmatrix} f_{1,1} \ldots f_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_{n,1} \ldots f_{n,n} \end{vmatrix}.$$

L'intégrale multiple

$$\int \mathrm{U}\, df_1\, df_2 \ldots df_n$$

est égale, en valeur absolue, à l'intégrale

$$\int \mathrm{UR}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

les limites des nouvelles intégrations devant être déterminées au moyen des limites données des intégrations primitives (*).

Démonstration. — Considérons d'abord, comme ci-dessus,

f_1 comme une fonction de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$;
f_2 .... de $f_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$;
f_3 .... de $f_1, f_2, x_3, \ldots, x_n$;
....
f_n .... de $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, x_n$,

et distinguons les dérivées partielles des fonctions transformées en les entourant de parenthèses : on pourra introduire successivement, comme il suit, les nouvelles variables dans l'intégrale donnée.

En commençant par intégrer par rapport à f_n, il faudra

(*) La transformation d'une intégrale multiple a été effectuée pour la première fois par Euler, 1759, *Nov. Comm. Petrop.*, 14, I, p. 72. Peu de temps après, Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773, p. 125) a traité la transformation d'une intégrale triple par une méthode applicable au cas général. La transformation d'une intégrale multiple en général est due à Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XII, p. 38, et *Det. funct.*, § 19).

remplacer la différentielle df_n par $\left(\frac{df_n}{dx_n}\right) dx_n$, pour introduire, au lieu de la variable f_n, la variable x_n. On a d'après cela

$$\int U\, df_1\, df_2 \ldots df_n = \int U \left(\frac{df_n}{dx_n}\right) df_1 \ldots df_{n-1}\, dx_n.$$

En commençant le développement de cette intégrale transformée par l'intégration relative à f_{n-1}, on devra remplacer df_{n-1} par $\left(\frac{df_{n-1}}{dx_{n-1}}\right) dx_{n-1}$, pour introduire, au lieu de la variable f_{n-1}, la variable x_{n-1}, ce qui donne

$$\int U \left(\frac{df_n}{dx_n}\right) df_1 \ldots df_{n-1}\, dx_n$$
$$= \int U \left(\frac{df_{n-1}}{dx_{n-1}}\right) \left(\frac{df_n}{dx_n}\right) df_1 \ldots df_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n.$$

En continuant ainsi, on obtient finalement

$$\int U\, df_1 \ldots df_n = \int U \left(\frac{df_1}{dx_1}\right) \ldots \left(\frac{df_n}{dx_n}\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

Mais le produit des dérivées artificielles qui supposent les transformations ci-dessus, n'est autre chose que le déterminant des fonctions données $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (2).

3. On parvient à la même règle en poursuivant la méthode que Lagrange a employée (*l. c.*) pour la transformation d'une intégrale triple.

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant des fonctions des variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

on a le système des équations linéaires

$$df_1 = f_{1,1}\, dx_1 + f_{1,2}\, dx_2 + \ldots + f_{1,n}\, dx_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$df_n = f_{n,1}\, dx_1 + f_{n,2}\, dx_2 + \ldots + f_{n,n}\, dx_n.$$

La résolution de ce système donne (§ IX, 1)

$$\varphi_{1,k}\,df_1 + \varphi_{2,k}\,df_2 + \ldots + \varphi_{n,k}\,df_n = R_n\,dx_k,$$

en posant

$$R_n = \begin{vmatrix} f_{1,1} \ldots f_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_{n,1} \ldots f_{n,n} \end{vmatrix}$$

et désignant par $\varphi_{i,k}$ le coefficient de $f_{i,k}$, c'est-à-dire de $\frac{df_i}{dx_k}$ dans R_n, de sorte que, en particulier, $\varphi_{n,n} = R_{n-1}$ (§ III, 5). Soit maintenant

$$\int U\,df_1\,df_2\ldots df_n$$

l'intégrale multiple à calculer, et U une fonction donnée de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Si, dans la suite des intégrations à effectuer, on commence par l'intégration relative à f_n, on a à chercher la somme de la différentielle $U\,df_n$, avec la condition que $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ restent constantes. D'après cette condition, on a, dans le système précédent d'équations linéaires,

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \ldots, \quad df_{n-1} = 0,$$

et par conséquent

$$R_{n-1}\,df_n = R_n\,dx_n,$$

de sorte que l'on peut remplacer df_n par $\frac{R_n}{R_{n-1}}\,dx_n$. On a par conséquent

$$\int U\,df_1\ldots df_n = \int U\,\frac{R_n}{R_{n-1}}\,df_1\ldots df_{n-1}\,dx_n,$$

les limites de x_n devant être déterminées d'après les limites données de f_n. Si l'on commence le développement de l'in-

tégrale ainsi transformée par l'intégration relative à la variable f_{n-1}, on a à chercher la somme de la différentielle $U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_{n-1}$, $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}, x_n$ restant invariables. Mais on a, dans cette supposition,

$$df_1 = 0, \ldots, \quad df_{n-2} = 0, \quad dx_n = 0,$$

et par suite on a le système de $n-1$ équations linéaires

$$\begin{aligned} 0 &= f_{1,1} \quad dx_1 + \ldots + f_{1,n-1} \quad dx_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= f_{n-2,1}\, dx_1 + \ldots + f_{n-2,n-1}\, dx_{n-1}, \\ df_{n-1} &= f_{n-1,1}\, dx_1 + \ldots + f_{n-1,n-1}\, dx_{n-1}. \end{aligned}$$

On en tire, comme ci-dessus,

$$R_{n-2}\, df_{n-1} = R_{n-1}\, dx_{n-1},$$

de sorte que l'on peut remplacer df_{n-1} par $\frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} dx_{n-1}$, et $U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_{n-1}$ par $U \frac{R_n}{R_{n-2}} dx_{n-1}$. On a donc, en prenant des limites convenables,

$$\int U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_1 \ldots df_{n-1}\, dx_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-2}} df_1 \ldots df_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n.$$

L'expression qu'on vient de trouver pour l'intégrale multiple cherchée peut se transformer par des considérations analogues, en remplaçant, en vertu d'un système de $n-2$ équations linéaires, df_{n-2} par $\frac{R_{n-2}}{R_{n-3}} dx_{n-2}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\int U \frac{R_n}{R_{n-2}} df_1 \ldots df_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n \\ &= \int U \frac{R_n}{R_{n-3}} df_1 \ldots df_{n-3}\, dx_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n; \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On trouve enfin, de la même manière,

$$\int \text{U} \frac{\text{R}_n}{\text{R}_1} df_1 dx_2 \ldots dx_n = \int \text{UR}_n dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

en commençant par intégrer relativement à f_1, et remplaçant, en vertu des conditions

$$dx_2 = 0, \quad dx_3 = 0, \quad \ldots, \quad dx_n = 0,$$

la différentielle df_1 par $\frac{df_1}{dx_1} dx_1$, c'est-à-dire par $\text{R}_1 dx_1$.

6. Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ne sont pas données immédiatement en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais en fonction des p quantités $y_1, y_2, \ldots, y_p$, lesquelles sont des fonctions données des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on trouve leur déterminant fonctionnel de la manière suivante (*). On a, par hypothèse,

$$\frac{df_i}{dx_k} = \frac{df_i}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_k} + \frac{df_i}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_k} + \ldots + \frac{df_i}{dy_p}\frac{dy_p}{dx_k},$$

et par suite

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{1,k} + a_{i,2} b_{2,k} + \ldots + a_{i,p} b_{p,k},$$

en posant

$$c_{i,k} = \frac{df_i}{dx_k}, \quad a_{i,k} = \frac{df_i}{dy_k}, \quad b_{i,k} = \frac{dy_i}{dx_k}.$$

Si l'on désigne par P, Q les déterminants des éléments a, b, et par R le déterminant cherché des éléments c, on a (§ VI, 1), pour $p < n$,

$$\text{R} = 0,$$

c'est-à-dire que, si les fonctions données peuvent s'exprimer au moyen d'un moindre nombre de fonctions des mêmes variables, le déterminant fonctionnel est identiquement nul, comme on pouvait s'y attendre d'après le théorème (3).

(*) JACOBI, *Det. funct.*, § 11.

Si $p = n$, on a $R = PQ$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dx_1} \cdots \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dy_1} \cdots \frac{df_1}{dy_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dy_1} \cdots \frac{df_n}{dy_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} \cdots \frac{dy_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx_1} \cdots \frac{dy_n}{dx_n} \end{vmatrix}.$$

Si $p > n$, on a $R = \Sigma PQ$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dx_1} \cdots \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dy_r} & \frac{df_1}{dy_s} & \cdots \\ \frac{df_2}{dy_r} & \frac{df_2}{dy_s} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{dy_r}{dx_1} & \frac{dy_r}{dx_2} & \cdots \\ \frac{dy_s}{dx_1} & \frac{dy_s}{dx_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Les termes de cette somme s'obtiennent en prenant, pour le système $r, s, \ldots$, toutes les combinaisons de n indices pris dans la suite $1, 2, \ldots, p$.

7. Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ne sont pas données explicitement en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais implicitement, par la condition que n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des variables $f_1, f_2, \ldots, f_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'annulent, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dx_1} \cdots \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \cdots \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} \cdots \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{df_1} \cdots \frac{d\varphi_1}{df_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_n}{df_1} \cdots \frac{d\varphi_n}{df_n} \end{vmatrix} \; (*).$$

Démonstration. — En vertu des équations données

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_n = 0,$$

chacune des quantités $f_1, f_2, \ldots, f_n$ peut s'exprimer au moyen des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En substituant les valeurs trouvées dans l'expression φ_i, on obtient l'identité $\varphi_i = 0$, et en différentiant celle-ci par rapport à x_k, il en

(*) JACOBI, *Det. funct.*, § 10.

résulte l'identité

$$\frac{d\varphi_i}{dx_k} + \frac{d\varphi_i}{df_1}\frac{df_1}{dx_k} + \ldots + \frac{d\varphi_i}{df_n}\frac{df_n}{dx_k} = 0,$$

c'est-à-dire

$$c_{i,k} = b_{i,1}\,a_{1,k} + \ldots + b_{i,n}\,a_{n,k},$$

en posant

$$c_{i,k} = -\frac{d\varphi_i}{dx_k}, \quad b_{i,k} = \frac{d\varphi_i}{df_k}, \quad a_{i,k} = \frac{df_i}{dx_k}.$$

En désignant les déterminants des éléments c, b, a respectivement par T, S, R, on a (§ VI, 1)

$$T = SR, \quad R = T : S,$$

et d'ailleurs (§ III, 2)

$$T = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \cdots \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} \cdots \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}.$$

8. Lorsque $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont données en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les conditions que $n+p$ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+p}$ des variables $f_1, f_2, \ldots, f_{n+p}, x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'annulent, on a (*)

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dx_1} \cdots \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \cdots \frac{d\varphi_1}{dx_n} & \frac{d\varphi_1}{df_{n+1}} \cdots \frac{d\varphi_1}{df_{n+p}} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_{n+p}}{dx_1} \cdots \frac{d\varphi_{n+p}}{dx_n} & \frac{d\varphi_{n+p}}{df_{n+1}} \cdots \frac{d\varphi_{n+p}}{df_{n+p}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{df_1} \cdots \frac{d\varphi_1}{df_{n+p}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_{n+p}}{df_1} \cdots \frac{d\varphi_{n+p}}{df_{n+p}} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. — En vertu des équations

$$\varphi_{n+1} = 0, \quad \varphi_{n+2} = 0, \ldots, \varphi_{n+p} = 0,$$

on peut exprimer $f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots, f_{n+p}$ au moyen des autres

(*) JACOBI, *Det. funct.*, § 13.

quantités; par conséquent, en vertu des équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_n = 0,$$

les quantités f_1, $f_2, \ldots, f_n$ seront exprimables en x_1, $x_2, \ldots, x_n$. On a donc (7), pour $i = 1, 2, \ldots, n+p$, tant que k ne surpasse pas n,

$$\frac{d\varphi_i}{dx_k} + \frac{d\varphi_i}{df_1}\frac{df_1}{dx_k} + \ldots + \frac{d\varphi_i}{df_n}\frac{df_n}{dx_k} = 0,$$

c'est-à-dire

$$c_{i,k} = b_{i,1}\,a_{1,k} + \ldots + b_{i,n}\,a_{n,k},$$

en posant

$$c_{i,k} = -\frac{d\varphi_i}{dx_k}, \quad b_{i,k} = \frac{d\varphi_i}{df_k}, \quad a_{i,k} = \frac{df_i}{dx_k}.$$

Si au contraire k est plus grand que n, posons

$$c_{i,k} = \frac{d\varphi_i}{df_k} = b_{i,k}.$$

En désignant les déterminants de degré $n+p$ des éléments c et b, et le déterminant de degré n des éléments a respectivement par T, S, R, on a (§ VI, 4)

$$T = SR, \quad R = T : S.$$

On a, en particulier,

$$\frac{df_1}{dx_1} = -\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{d\varphi_1}{df_2} & \ldots & \frac{d\varphi_1}{df_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} & \frac{d\varphi_n}{df_2} & \ldots & \frac{d\varphi_n}{df_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{df_1} & \ldots & \frac{d\varphi_1}{df_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_n}{df_1} & \ldots & \frac{d\varphi_n}{df_n} \end{vmatrix}.$$

9. Soient f_1, $f_2, \ldots, f_n$ des fonctions, indépendantes entre elles, de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seront aussi des fonctions indépendantes entre elles de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Le déterminant du système $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et celui du système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont réciproques l'un

de l'autre, c'est-à-dire que leur produit est égal à l'unité (*).

Démonstration. — Pour différentier f_i par rapport à f_k, il faudrait exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au moyen de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et former

$$\frac{df_i}{dx_1}\frac{dx_1}{df_k}+\frac{df_i}{dx_2}\frac{dx_2}{df_k}+\ldots+\frac{df_i}{dx_n}\frac{dx_n}{df_k}.$$

Or cette somme est égale à zéro ou à l'unité selon que k est ou n'est pas différent de i, puisque $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont indépendantes entre elles.

Désignons $\frac{df_i}{dx_k}$ par $a_{i,k}$, $\frac{dx_i}{df_k}$ par $b_{i,k}$, et la somme en question par $c_{i,k}$. En désignant de plus par R, S, T les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\ldots a_{n,n}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} b_{1,1}\ldots b_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n,1}\ldots b_{n,n}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} c_{1,1}\ldots c_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{n,1}\ldots c_{n,n}\end{vmatrix},$$

on a

$$c_{i,k}=a_{i,1}b_{1,k}+\ldots+a_{i,n}b_{n,k},$$

et par suite (§ VI, 1)

$$\mathrm{T}=\mathrm{RS}.$$

Or $c_{i,k}$ est égal à o ou à 1 selon que k est ou n'est pas différent de i; par conséquent $\mathrm{T}=1$ (§ II, 7), c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1}\ldots\frac{df_1}{dx_n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{df_n}{dx_1}\ldots\frac{df_n}{dx_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{df_1}\ldots\frac{dx_1}{df_n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{df_1}\ldots\frac{dx_n}{df_n}\end{vmatrix}=1.$$

10. R et S ayant la signification ci-dessus, et les coeffi-

(*) Jacobi, *Det. funct.*, § 8. — *Voir* Mœbius, *Journal de Crelle*, t. XII, p. 116.

cients de $\frac{df_i}{dx_k}$ dans R et de $\frac{dx_i}{df_k}$ dans S étant désignés par $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, on aura (*)

$$\frac{dx_i}{df_k} = \frac{\alpha_{k,i}}{R}, \quad \frac{df_i}{dx_k} = \frac{\beta_{k,i}}{S},$$

$$R \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{df_1} \cdots \frac{dx_1}{df_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_m}{df_1} \cdots \frac{dx_m}{df_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{df_{m+1}}{dx_{m+1}} \cdots \frac{df_{m+1}}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dx_{m+1}} \cdots \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix},$$

$$S \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_1}{dx_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_m}{dx_1} \cdots \frac{df_m}{dx_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx_{m+1}}{df_{m+1}} \cdots \frac{dx_{m+1}}{df_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{df_{m+1}} \cdots \frac{dx_n}{df_n} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. — D'après les notations employées (9), on a

$$a_{1,1}\, b_{1,k} + a_{1,2}\, b_{2,k} + \ldots + a_{1,n}\, b_{n,k} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{k,1}\, b_{1,k} + a_{k,2}\, b_{2,k} + \ldots + a_{k,n}\, b_{n,k} = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n,1}\, b_{1,k} + a_{n,2}\, b_{2,k} + \ldots + a_{n,n}\, b_{n,k} = 0.$$

Multipliant ces identités respectivement par

$$\alpha_{1,i}, \quad \alpha_{2,i}, \ldots, \quad \alpha_{n,i},$$

et faisant la somme des produits, on a (§ III, 1)

$$R\, b_{i,k} = \alpha_{k,i}.$$

On a de plus (§ VII, 2)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{1,m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m,1} \ldots \alpha_{m,m} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} \ldots a_{m+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n,m+1} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

(*) Jacobi, *Det. funct.*, §§ 8 et 9.

En substituant les valeurs que l'on vient de trouver pour $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{m,m}$, le premier membre devient (§ III, 2)

$$R^m \begin{vmatrix} b_{1,1} \ldots b_{1,m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{m,1} \ldots b_{m,m} \end{vmatrix},$$

d'où résulte la seconde propriété énoncée. Les autres propriétés résultent de celles que l'on vient de démontrer, en échangeant simultanément f avec x, R avec S.

11. En désignant par t une quantité dont $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dépendent suivant une loi donnée, on peut former

$$\frac{df_1}{dt}, \quad \frac{df_2}{dt}, \ldots, \quad \frac{df_n}{dt}.$$

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui entrent dans ces quotients différentiels, peuvent s'exprimer au moyen de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et alors on peut différentier ces quotients différentiels suivant $f_1, f_2, \ldots$. Le déterminant fonctionnel R (9 et 10), qui était d'abord une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, peut s'exprimer au moyen de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et alors on peut le différentier par rapport à t. En désignant, d'autre part, par u une quantité dont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dépendent suivant une loi donnée, etc., on a, d'après les notations admises (*),

$$\frac{d \log R}{dt} = \frac{d\frac{df_1}{dt}}{df_1} + \frac{d\frac{df_2}{dt}}{df_2} + \ldots + \frac{d\frac{df_n}{at}}{df_n},$$

$$o = \frac{d\left(S\frac{df_1}{dt}\right)}{df_1} + \frac{d\left(S\frac{df_2}{dt}\right)}{df_2} + \ldots + \frac{d\left(S\frac{df_n}{dt}\right)}{df_n},$$

(*) JACOBI, *Det. funct.*, § 9. — *Voir* JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XXVII, p. 209.

pareillement

$$\frac{d\log S}{du} = \frac{d\frac{dx_1}{du}}{dx_1} + \frac{d\frac{dx_2}{du}}{dx_2} + \ldots + \frac{d\frac{dx_n}{du}}{dx_n},$$

$$o = \frac{d\left(R\frac{dx_1}{du}\right)}{dx_1} + \frac{d\left(R\frac{dx_2}{du}\right)}{dx_2} + \ldots + \frac{d\left(R\frac{dx_n}{du}\right)}{dx_n}.$$

On a en particulier (*)

$$o = \frac{d\beta_{k,1}}{df_1} + \frac{d\beta_{k,2}}{df_2} + \ldots + \frac{d\beta_{k,n}}{df_n},$$

$$o = \frac{d\alpha_{k,1}}{dx_1} + \frac{d\alpha_{k,2}}{dx_2} + \ldots + \frac{d\alpha_{k,n}}{dx_n}.$$

Démonstration. — D'après le § III, 10, on a

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{i,k} \alpha_{i,k} \frac{da_{i,k}}{dt},$$

et d'ailleurs (10)

$$\alpha_{i,k} = R\frac{dx_k}{df_i},$$

et

$$\frac{da_{i,k}}{dt} = \frac{d^2 f_i}{dt\,dx_k}.$$

Mais on a maintenant

$$\frac{d^2 f_i}{dt\,dx_1}\frac{dx_1}{df_i} + \frac{d^2 f_i}{dt\,dx_2}\frac{dx_2}{df_i} + \ldots + \frac{d^2 f_i}{dt\,dx_n}\frac{dx_n}{df_i} = \frac{d\frac{df_i}{dt}}{df_i},$$

et par suite

$$\frac{dR}{dt} = R\sum_i \frac{d\frac{df_i}{dt}}{df_i}, \quad \frac{d\log R}{dt} = \sum_i \frac{d\frac{df_i}{dt}}{df_i}.$$

(*) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XXVII, p. 203.

On a, de plus, $RS = 1$ (9) et par conséquent

$$\log R + \log S = 0,$$

et

$$0 = \frac{d \log S}{dt} + \sum_i \frac{d \frac{df_i}{dt}}{df_i}.$$

Le déterminant fonctionnel S étant une fonction des quantités $f_1, f_2, \ldots, f_n$, qui renferment la variable t, on a

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{df_1}\frac{df_1}{dt} + \frac{dS}{df_2}\frac{df_2}{dt} + \ldots + \frac{dS}{df_n}\frac{df_n}{dt}.$$

Si l'on joint à cela que

$$\frac{dS}{df_i}\frac{df_i}{dt} + S\frac{d \frac{df_i}{dt}}{df_i} = \frac{d\left(S \frac{df_i}{dt}\right)}{df_i},$$

on obtient la seconde des identités que nous avons posées. Les identités analogues s'obtiennent par l'échange simultané de t, f, R avec u, x, S.

Si en particulier $t = x_k$, on a (10)

$$S \frac{df_i}{dx_k} = \beta_{k,i}, \text{ etc.}$$

12. Si l'on désigne par $X, X_1, \ldots, X_n$ des fonctions données de $x, x_1, \ldots, x_n$, par f une fonction indéterminée des mêmes variables, et que l'on pose

$$\psi(f) = X\frac{df}{dx} + X_1\frac{df}{dx_1} + \ldots + X_n\frac{df}{dx_n}:$$

si l'on désigne de plus par $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n solutions indépendantes entre elles de l'équation linéaire aux différentielles partielles $\psi(f) = 0$, de sorte que $\psi(f_1)$, $\psi(f_2), \ldots$, $\psi(f_n)$ s'annulent identiquement, il existe un multiplica-

teur M, au moyen duquel $\psi(f)$ devient le déterminant des fonctions $f, f_1, \ldots, f_n$, c'est-à-dire qu'on a

$$M\psi(f) = \begin{vmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dx_1} & \cdots & \frac{df}{dx_n} \\ \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{df_n}{dx} & \frac{df_n}{dx_1} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix},$$

et l'on a, en désignant par i un indice quelconque, et par A_i le coefficient de $\frac{df}{dx_i}$ dans le déterminant fonctionnel,

$$M = \frac{A_i}{X_i},$$

ou, ce qui revient au même, M est une solution de l'équation linéaire aux différentielles partielles

$$o = \frac{d(\mu X)}{dx} + \frac{d(\mu X_1)}{dx_1} + \cdots + \frac{d(\mu X_n)}{dx_n} \text{ (*)}.$$

En effet, du système des équations linéaires

$$\psi(f) = X\frac{df}{dx} + X_1\frac{df}{dx_1} + \cdots + X_n\frac{df}{dx_n},$$

$$o = X\frac{df_1}{dx} + X_1\frac{df_1}{dx_1} + \cdots + X_n\frac{df_1}{dx_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$o = X\frac{df_n}{dx} + X_1\frac{df_n}{dx_1} + \cdots + X_n\frac{df_n}{dx_n},$$

il résulte (§ IX, 1)

$$\psi(f)A_i = X_i R,$$

R désignant le déterminant du système linéaire, et A_i le

(*) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XXVII, p. 210.

coefficient de $\frac{df}{dr_i}$ dans R. Si l'on fait maintenant

$$A_i = MX_i,$$

on a (11)

$$\frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MX_1)}{dx_1} + \cdots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0.$$

Remarque. — La fonction des quantités $x, x_1, \ldots, x_n$, désignée par M, a été nommée par Jacobi (*l. c.*) le *multiplicateur* de l'équation aux différentielles partielles

$$\psi(f) = 0,$$

ou de l'équation aux différentielles partielles

$$0 = X - X_1 \frac{dx}{dx_1} - \cdots - X_n \frac{dx}{dx_n},$$

ou du système d'équations différentielles ordinaires

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n,$$

parce que la résolution de ces équations aux différentielles partielles et celle du système d'équations différentielles ordinaires sont étroitement liées entre elles. Soient, en effet, π une solution de l'équation $\psi(f) = 0$, et x une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, déterminée en égalant π à une constante arbitraire : on a

$$0 = X \frac{d\pi}{dx} + X_1 \frac{d\pi}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{d\pi}{dx_n},$$

$$\frac{d\pi}{dx_i} + \frac{d\pi}{dx}\frac{dx}{dx_i} = 0,$$

$$\frac{d\pi}{dx} : \frac{d\pi}{dx_1} : \frac{d\pi}{dx_2} : \cdots = 1 : -\frac{dx}{dx_1} : -\frac{dx}{dx_2} : \ldots,$$

et par suite

$$0 = X - X_1 \frac{dx}{dx_1} - \cdots - X_n \frac{dx}{dx_n}.$$

Soient, d'autre part, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des solutions indépendantes entre elles de l'équation $\psi(f) = 0$: en égalant ces

solutions à des constantes, on a

$$\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dx_1}dx_1 + \cdots + \frac{df_1}{dx_n}dx_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{df_n}{dx}dx + \frac{df_n}{dx_1}dx_1 + \cdots + \frac{df_n}{dx_n}dx_n = 0,$$

et, par la résolution de ce système linéaire, il vient

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots = \mathrm{A} : \mathrm{A}_1 : \mathrm{A}_2 : \ldots$$
$$= \mathrm{X} : \mathrm{X}_1 : \mathrm{X}_2 : \ldots$$

§ XIV. — *Théorèmes sur les fonctions homogènes.*

1. Soit u une fonction homogène, de degré m, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$: en désignant $\frac{du}{dx_i}$ par u_i, on a, par le théorème d'Euler (*),

$$mu = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n.$$

En appliquant le même théorème aux fonctions homogènes $u_1, u_2, \ldots$, de $m-1$ dimensions, et désignant $\frac{d^2u}{dx_i\,dx_k}$ par $u_{i,k}$, on a le système d'identités (**)

$$(m-1)\,u_1 = u_{1,1}x_1 + \ldots + u_{n,1}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(m-1)\,u_n = u_{1,n}x_1 + \ldots + u_{n,n}x_n.$$

2. D'après les notations adoptées, on a

$$m(m-1)u = \sum_{i,k} x_i x_k u_{i,k} \; (***),$$

i et k devant être égalés successivement à $1, 2, \ldots, n$.

(*) *Mechanica*, 1736, t. II, §§ 106, 497. — *Calc. diff.*, § 225.
(**) HESSE, *Journal de Crelle*, t. XXVIII, p. 78.
(***) LACROIX, *Calc. diff.*, § 91.

Démonstration. — En multipliant les identités ci-dessus respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et les ajoutant, on trouve, pour second membre, la somme en question, à cause de

$$\frac{d^2 u}{dx_i\, dx_k} = \frac{d^2 u}{dx_k\, dx_i}, \quad u_{i,k} = u_{k,i},$$

et, pour premier membre, $m\,(m-1)\,u$, parce qu'on a (1)

$$u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n = mu.$$

Remarque. — Si l'on exprime à leur tour les dérivées partielles secondes de la fonction homogène au moyen de ses dérivées partielles troisièmes, on obtient, pour la fonction homogène, la somme des produits de ses dérivées partielles troisièmes, multipliées par les variables par rapport auxquelles elles sont différentiées; et ainsi de suite. Toutes ces décompositions d'une fonction homogène s'obtiennent, comme l'a remarqué Serret (*Algèbre supér.*, note XII), en multipliant les variables par $1+\omega$, et par suite la fonction homogène par $(1+\omega)^m$, et développant l'identité

$$f(x_1 + \omega x_1, x_2 + \omega x_2, \ldots, x_n + \omega x_n) = (1+\omega)^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

par rapport à ω, à l'aide du théorème de Taylor.

3. La résultante du système de $n+1$ équations linéaires identiques, donné au n° 1, est (§ IX, 3)

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}u & u_1 & \ldots u_n \\ u_1 & u_{1,1} & \ldots u_{n,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & u_{1,n} & \ldots u_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

en supprimant le facteur $m-1$ dans la première ligne verticale d'éléments (§ III, 2). Le déterminant de degré $n+1$ qui compose le premier membre, peut (§ III, 3)

être considéré comme la somme des déterminants

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}u & u_1 & \dots & u_n \\ & 0 & u_{1,1} \dots & u_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & u_{1,n} \dots & u_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_{1,1} & \dots & u_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{1,n} & \dots & u_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Le premier de ces déterminants se réduit (§ II, 5) à

$$\frac{m}{m-1}u \begin{vmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{1,n} & \dots & u_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Le second déterminant peut se développer d'après le § V, 2, parce que $u_{i,k} = u_{k,i}$. Si l'on pose, en effet,

$$\nu = \begin{vmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{1,n} & \dots & u_{n,n} \end{vmatrix},$$

et qu'on désigne par $\alpha_{i,k}$ le coefficient de $u_{i,k}$ dans ν, de sorte qu'on ait $\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$ (§ III, 8), il viendra

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_{1,1} & \dots & u_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{1,n} & \dots & u_{n,n} \end{vmatrix} = -\sum_{i,k} u_i u_k \alpha_{i,k}.$$

Par suite, l'identité ci-dessus devient

$$\frac{m}{m-1}u\nu - \sum_{i,k} u_i u_k \alpha_{i,k} = 0 \ (*).$$

(*) HESSE, *Journal de Crelle*, t. XXXVIII, p. 242.

4. Du système linéaire (1)

$$-(m-1)\frac{mu}{m-1}+u_1\ x_1+\ldots+u_n\ x_n=0,$$
$$-(m-1)\ \ u_1\ \ +u_{1,1}x_1+\ldots+u_{n,1}x_n=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-(m-1)\ \ u_n\ \ +u_{1,n}x_1+\ldots+u_{n,n}x_n=0,$$

il résulte, d'après le § IX, 3, et en ayant égard au § VII, 5, qu'on a la proportion

$$\text{(I)}\quad -(m-1):x_1:x_2:x_3:\ldots=\sqrt{\nu}:\sqrt{\beta_{1,1}}:\sqrt{\beta_{2,2}}:\sqrt{\beta_{3,3}}:\ldots,$$

en désignant respectivement par ν, β_i, $\beta_{i,k}$ les coefficients de $\frac{mu}{m-1}$, u_i, $u_{i,k}$ dans le déterminant, de degré $n+1$,

$$R=\begin{vmatrix}\frac{mu}{m-1} & u_1 & \ldots & u_n\\ u_1 & u_{1,1} & \ldots & u_{n,1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ u_n & u_{1,n} & \ldots & u_{n,n}\end{vmatrix}.$$

On a, en effet,

$$R=0\ (3),\quad \beta_{i,k}=\beta_{k,i}\ (\S\ \text{III}, 8),$$
$$\sqrt{\beta_{i,i}\nu}=\beta_i,\quad \sqrt{\beta_{i,i}\beta_{k,k}}=\beta_{i,k}\ (\S\ \text{VII}, 5),\ \text{etc.}$$

Par conséquent, si un quelconque des déterminants partiels premiers, de degré n, du déterminant identiquement nul R, s'annule, alors les autres déterminants partiels premiers de R s'annulent aussi identiquement, et il en est ainsi en particulier pour ν; et réciproquement.

La proportion précédente nous apprend que

$$-\frac{x_i}{m-1}=\sqrt{\frac{\beta_{i,i}}{\nu}}=\frac{\sqrt{\beta_{i,i}\nu}}{\nu},$$
$$\frac{x_i\,x_k}{(m-1)^2}=\frac{\sqrt{\beta_{i,i}\,\beta_{k,k}}}{\nu}$$

Or on a

$$\sqrt{\beta_{i,i}\,\nu} = \beta_i, \quad \sqrt{\beta_{i,i}\,\beta_{k,k}} = \beta_{i,k};$$

par conséquent

$$\text{(II)} \qquad \beta_i = -\frac{x_i}{m-1}\nu, \quad \beta_{i,k} = \frac{x_i\,x_k}{(m-1)^2}\nu\ (*).$$

5. Les relations que nous venons de démontrer sont d'une grande utilité dans la théorie de la courbure des lignes et des surfaces. Soit f une fonction des coordonnées rectangulaires x, y d'un point; $f = 0$ sera l'équation de la ligne sur laquelle se trouve le point (x, y). En posant, de plus,

$$\frac{df}{dx} = f_1, \quad \frac{df}{dy} = f_2,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = f_{11}, \quad \frac{d^2f}{dx\,dy} = \frac{d^2f}{dy\,dx} = f_{12} = f_{21}, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = f_{22},$$

on sait que

$$x - \xi : y - \eta = f_1 : f_2$$

est l'équation de la normale à la ligne $(f = 0)$, menée au point (x, y) de cette ligne, ξ, η désignant les coordonnées d'un point quelconque de cette normale. En posant

$$\lambda(x - \xi) = f_1, \quad \lambda(y - \eta) = f_2,$$

et différentiant complétement ces équations, il vient

$$(x - \xi)\,d\lambda + \lambda\,dx = df_1, \quad (y - \eta)\,d\lambda + \lambda\,dy = df_2,$$

ou

$$f_1\frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda\,dx, \quad f_2\frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda\,dy,$$

(*) Cela s'accorde avec les relations établies par Hesse, *Journal de Crelle*, t. XXVIII, p. 103, et t. XXXVIII, p. 242.

pour la normale à la ligne $(f=0)$, au point

$$(x+dx,\ y+dy),$$

laquelle a de commun avec la première normale le point (ξ,η), c'est-à-dire le centre de courbure de la ligne $(f=0)$ au point (x,y). Des équations

$$\begin{aligned} 0 &= f_1\,dx + f_2\,dy,\\ f_1\frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11}-\lambda)\,dx + f_{12}\,dy,\\ f_2\frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{21}\,dx + (f_{22}-\lambda)\,dy, \end{aligned}$$

il résulte (§ IX, 3) l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

pour la détermination de λ. En développant cette équation d'après le § V, 2, on trouve $f_1^2+f_2^2$ pour le coefficient de λ, et, pour le terme indépendant de λ,

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}.$$

On a par conséquent

$$\lambda = \frac{-L}{f_1^2+f_2^2}.$$

Enfin, on a, pour le calcul du rayon de courbure, que nous désignerons par ρ, la formule

$$\rho^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 = \frac{f_1^2+f_2^2}{\lambda^2},$$

et pour la valeur de la courbure,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-L}{(f_1^2+f_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le déterminant L est plus facile à traiter lorsque la fonction à laquelle il se rapporte est homogène. En désignant par u la fonction homogène des variables x_1, x_2, x_3, qui devient identique avec f pour $x_3 = 1$, on a (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2},$$

en posant

$$v = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix},$$

et faisant $x_3 = 1$ après la différentiation.

Les points de la ligne $(f = 0)$ ou $(u = 0)$, pour lesquels L ou v sont nuls, et par suite la courbure nulle, sont en général des points d'inflexion de la ligne. Ils peuvent être considérés comme les intersections de la ligne $(f = 0)$ ou $(u = 0)$ avec la ligne $(L = 0)$ ou $(v = 0)$. Or f et u sont, par hypothèse, du degré m, tandis que v est du degré $3(m-2)$; par conséquent les lignes en question ont en général $3m(m-2)$ intersections. Donc *une ligne de degré m a en général* $3m(m-2)$ *points d'inflexion* (*).

6. Si f est une fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point, $f = 0$ sera l'équation de la surface sur laquelle le point (x, y, z) est situé. Alors, d'après les notations précédentes, la proportion

$$x - \xi : y - \eta : z - \zeta = f_1 : f_2 : f_3$$

représentera les équations de la normale à la surface $(f = 0)$

(*) Ce théorème a été établi pour la première fois par Plücker (*Syst. der Analyt. Geom.*, p. 264). La démonstration que nous donnons ici est due à Hesse (*loc. cit.*). Jacobi a donné une autre démonstration (*Journal de Crelle*, t. XL, p. 254).

pour le point (x, y, z), et l'on pourra remplacer ces équations par

$$\lambda(x-\xi)=f_1, \quad \lambda(y-\eta)=f_2, \quad \lambda(z-\zeta)=f_3.$$

Les normales à la surface $(f=0)$, menées aux points (x, y, z) et $(x+dx, y+dy, z+dz)$, ne se coupent pas en général, mais seulement dans le cas où le second de ces points est situé sur une des lignes de courbure passant par le point (x, y, z). Leur intersection (ξ, η, ζ) est le centre de courbure d'une des sections principales de la surface faites au point (x, y, z). En différentiant les équations précédentes, on trouve dans ce cas

$$(x-\xi)\,d\lambda+\lambda\,dx=df_1, \quad \text{etc.},$$

ou encore

$$f_1\frac{d\lambda}{\lambda}=df_1-\lambda\,dx,$$

$$f_2\frac{d\lambda}{\lambda}=df_2-\lambda\,dy,$$

$$f_3\frac{d\lambda}{\lambda}=df_3-\lambda\,dz,$$

et par conséquent (§ IX, 3)

$$\begin{vmatrix} f_1 & df_1 & dx \\ f_2 & df_2 & dy \\ f_3 & df_3 & dz \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation différentielle, jointe avec l'équation différentielle de la surface donnée,

$$f_1\,dx+f_2\,dy+f_3\,dz=0,$$

détermine la ligne de courbure passant au point (x, y, z) et sur laquelle est situé le point $(x+dx, y+dy, z+dz)$.

Du système des équations

$$\begin{aligned}
0 &= f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz,\\
f_1\frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11}-\lambda)\,dx + f_{12}\,dy + f_{13}\,dz,\\
f_2\frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{12}\,dx + (f_{22}-\lambda)\,dy + f_{23}\,dz,\\
f_3\frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{13}\,dx + f_{23}\,dy + (f_{33}-\lambda)\,dz,
\end{aligned}$$

il résulte, pour déterminer λ, l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du second degré, et λ^2 y a, pour coefficient, $-f_1^2-f_2^2-f_3^2$, tandis que le terme indépendant de λ est

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

En désignant par λ', λ'' les racines de cette équation, on a

$$\lambda'\lambda'' = \frac{-L}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}.$$

En appelant enfin ρ la distance des points (ξ,η,ζ), (x,y,z), il vient

$$\rho^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

$$\lambda\rho = \sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}.$$

Par conséquent, ρ a aussi deux valeurs ρ', ρ'', telles que

$$\lambda'\lambda''\rho'\rho'' = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.$$

Les valeurs réciproques $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\rho''}$, sont d'ailleurs les courbures des lignes de courbure passant par (x, y, z), ou des sections principales de la surface auxquelles elles sont tangentes. Le produit des courbures principales de la surface $(f = 0)$ au point (x, y, z) est donc

$$\frac{1}{\rho'\rho''} = -\frac{L}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2}.$$

Si l'on désigne par u la fonction homogène des variables x_1, x_2, x_3, x_4, qui devient identique avec f pour $x_4 = 1$, on a (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2}.$$

Les points de la surface $(f = 0)$ ou $(u = 0)$ pour lesquels L ou v s'annulent, sont en général des points d'inflexion de la surface. Ils sont situés sur l'intersection des surfaces ($f = 0$ ou $u = 0$) et ($L = 0$ ou $v = 0$). Or f et u sont, par hypothèse, du degré m, tandis que v est du degré $4(m-2)$. Donc *la ligne d'inflexion d'une surface du degré m est située en même temps sur une surface déterminée du degré* $4(m-2)$ (*).

7. Des identités données au n° 1, Jacobi (**), à l'occasion d'une proposition qui lui avait été communiquée par Hesse, a développé le système suivant d'identités relatives

(*) HESSE, *loc. cit.*

(**) *Journal de Crelle*, t. XL, p. 318.

au déterminant dont il a été plusieurs fois question

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & \ldots & u_{n,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{1,n} & \ldots & u_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On a d'abord (§ IX, 1)

$$\text{(I)} \qquad v x_i = (m-1)(\alpha_{1,i} u_1 + \ldots + \alpha_{n,i} u_n),$$

$\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$ désignant, comme ci-dessus, le coefficient de $u_{i,k} = u_{k,i}$ dans v. En différentiant cette identité par rapport à x_i ou à x_k, et posant, pour abréger,

$$\frac{dv}{dx_k} = v_k,$$

il vient

$$\text{(II)} \left\{ \begin{aligned} v_i x_i &= (m-1)\left(\frac{d\alpha_{1,i}}{dx_i} u_1 + \ldots + \frac{d\alpha_{n,i}}{dx_i} u_n\right) + (m-2) v, \\ v_k x_i &= (m-1)\left(\frac{d\alpha_{1,i}}{dx_k} u_1 + \ldots + \frac{d\alpha_{n,i}}{dx_k} u_n\right), \end{aligned} \right.$$

puisqu'on a (§ III, 1)

$$\begin{aligned} \alpha_{1,i} u_{1,i} + \ldots + \alpha_{n,i} u_{n,i} &= v, \\ \alpha_{1,i} u_{1,k} + \ldots + \alpha_{n,i} u_{n,k} &= 0. \end{aligned}$$

Par une nouvelle différentiation des identités trouvées, et en posant

$$\frac{d^2 v}{dx_k\, dx_l} = v_{k,l},$$

on trouve

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} v_{i,k} x_i = {} & (m-1)\left(\frac{d^2\alpha_{1,i}}{dx_i\, dx_k} u_1 + \ldots + \frac{d^2\alpha_{n,i}}{dx_i\, dx_k} u_n\right) \\ & -(m-1)\left(\alpha_{1,i}\frac{du_{1,i}}{dx_k} + \ldots + \alpha_{n,i}\frac{du_{n,i}}{dx_k}\right) + (m-1) v_k, \\ v_{k,l} x_i = {} & (m-1)\left(\frac{d^2 a_{1,i}}{dx_k\, dx_l} u_1 + \ldots + \frac{d^2\alpha_{n,i}}{dx_k\, dx_l} u_n\right) \\ & -(m-1)\left(\alpha_{1,i}\frac{du_{1,l}}{dx_k} + \ldots + \alpha_{n,i}\frac{du_{n,l}}{dx_k}\right), \end{aligned} \right.$$

en ayant égard aux identités

$$\alpha_{1,i}\ u_{1,i} + \ldots + \alpha_{n,i}\ u_{n,i} = v,$$

$$\alpha_{1,i}\ u_{1,l} + \ldots + \alpha_{n,i}\ u_{n,l} = 0,$$

différentiées par rapport à x_k.

8. Le système des valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par lequel on satisfait aux équations, en général incompatibles,

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \ \ldots, \quad u_n = 0,$$

a pour conséquence d'annuler les fonctions u et v (1 et 7, I), ainsi que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (7, II). Le déterminant

$$w = \begin{vmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{n,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{1,n} & \ldots & v_{n,n} \end{vmatrix},$$

formé avec v comme v l'est avec u, s'annule pareillement.

Des équations

$$0 = u_{1,1}\ x_1 + \ldots + u_{n,1}\ x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = u_{1,n}\ x_1 + \ldots + u_{n,n}\ x_n,$$

il résulte d'ailleurs (§ IX, 3, et § VII, 5)

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = \sqrt{\alpha_{1,1}} : \sqrt{\alpha_{2,2}} : \sqrt{\alpha_{3,3}} : \ldots,$$

en désignant par $\alpha_{i,k}$ le coefficient de $u_{i,k}$ dans v. On a, par suite, à la fois

$$\sqrt{\alpha_{i,i}} = x_i \sqrt{\mathrm{N}}, \quad \sqrt{\alpha_{k,k}} = x_k \sqrt{\mathrm{N}},$$

$$\alpha_{i,k}\ x_i = x_i x_k\ \mathrm{N},$$

N étant invariable pour tous les indices. Faisant ces substitutions au n° 7, III, on a

$$v_{i,k}\, x_i = -(m-1)\, \mathrm{N} x_i \left(x_1 \frac{du_{i,k}}{dx_1} + \ldots + x_n \frac{du_{i,k}}{dx_n} \right),$$

c'est-à-dire (1)

$$v_{i,k} = -(m-1)(m-2)\,\mathrm{N}\,u_{i,k},$$

et par conséquent

$$v_{11} : v_{12} : \ldots : v_{23} : \ldots = u_{11} : u_{12} : \ldots : u_{23} : \ldots \text{ (*)}.$$

9. La fonction homogène du degré m, lorsqu'elle est rationnelle et entière et que ses coefficients sont entiers, s'appelle une *forme du degré m (quadratique, cubique, etc.) de n variables indéterminées (binaire, tertiaire, etc.)* (**). Une forme quadratique (que l'on appelle souvent simplement une *forme*) peut se représenter par

$$\sum_{i,k} a_{i,k}\, x_i\, x_k;$$

une forme cubique, par

$$\sum_{i,k,l} a_{i,k,l}\, x_i\, x_k\, x_s \text{ (***)},$$

i, k, l prenant toutes les valeurs, depuis 1 jusqu'à n, et les quantités $a_{i,k}$, $a_{i,k,l}$ ne changeant point lorsqu'on intervertit leurs indices. Par *déterminant d'une forme quadratique,* on entend la valeur, prise négativement, du déterminant formé avec le système des coefficients (****). Ainsi, en posant

$$\mathrm{R} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

(*) HESSE, *Journal de Crelle*, t. XL, p. 316. — *Voir* JACOBI, *loc. cit.*

(**) GAUSS, *Disquis. arith.*, art. 153 et 266.

(***) *Voir* HESSE, *Journal de Crelle*, t. XXVIII, p. 74.

(****) GAUSS, *loc. cit.*, art. 154 et 267.

— R sera dit le déterminant de la forme $u = \sum_{i,k} a_{i,k} x_i x_k$.

Le développement de ce déterminant résulte du § V, 2. En désignant par $\alpha_{i,k}$ le coefficient de $a_{i,k}$ dans R, la forme quadratique

$$U = -\sum_{i,k} \alpha_{i,k}\, y_i y_k$$

est dite la *forme adjointe* (*forma adjuncta*) (*) de la forme donnée u. On a (§ V, 2)

$$U = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & \ldots & y_n \\ y_1 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On a de plus (§ VII, 1)

$$-\begin{vmatrix} -\alpha_{1,1} & \ldots & -\alpha_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_{n,1} & \ldots & -\alpha_{n,n} \end{vmatrix} = (-R)^{n-1},$$

c'est-à-dire que le déterminant de la forme adjointe est la puissance $(n-1)^{ième}$ du déterminant de la forme proposée.

D'après le § V, 2, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_1 & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = -\sum x_i x_k A_{i,k},$$

$A_{i,k}$ désignant le coefficient de $\alpha_{i,k}$ dans $\sum \pm \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{n,n}$;

(*) Gauss, *loc. cit.*, 267.

Or on a $A_{i,k} = R^{n-2} \alpha_{i,k}$ (§ VII, 3); par conséquent,

$$u = -\frac{1}{R^{n-2}} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \quad (*).$$

Remarque. — Si la forme u est quadratique, ses dérivées partielles seront linéaires; par conséquent, le déterminant des dérivées partielles secondes de u (§ XIII, 3), de même que le discriminant de u (§ XII, 12), ne différeront que par un facteur numérique du déterminant de cette forme quadratique.

§ XV. — *Des substitutions linéaires, et, en particulier, des substitutions orthogonales.*

1. Lorsqu'il s'agit de transformer une fonction donnée des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ en une fonction des variables $y_1, y_2, \dots, y_n$, au moyen des substitutions linéaires

$$x_1 = b_{1,1}\, y_1 + b_{1,2}\, y_2 + \dots + b_{1,n}\, y_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = b_{n,1}\, y_1 + b_{n,2}\, y_2 + \dots + b_{n,n}\, y_n,$$

le déterminant des coefficients de la substitution,

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

s'appelle le *déterminant* (*modulus*) *de la substitution linéaire*. Ce déterminant doit être différent de zéro, si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont supposées indépendantes entre elles (§ IX, 2; § XIII, 3). La substitution linéaire est dite

(*) Brioschi, *Det.* (53).

unimodulaire (*), lorsque son déterminant est égal à l'unité.

2. Si les fonctions linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont transformées, par une substitution linéaire, en des fonctions linéaires des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, le déterminant du système des fonctions transformées (§ XIII, 1) sera le produit du déterminant du système des fonctions données par le déterminant de la substitution linéaire (**).

Démonstration. — Soient

$$f_1 = a_{1,1}\, x_1 + \ldots + a_{1,n}\, x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = a_{n,1}\, x_1 + \ldots + a_{n,n}\, x_n,$$

les fonctions linéaires données. Par la substitution linéaire

$$x_1 = b_{1,1}\, y_1 + \ldots + b_{1,n}\, y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = b_{n,1}\, y_1 + \ldots + b_{n,n}\, y_n,$$

on obtient les fonctions transformées

$$f_1 = c_{1,1}\, y_1 + \ldots + c_{1,n}\, y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = c_{n,1}\, y_1 + \ldots + c_{n,n}\, y_n.$$

On trouvera $c_{i,k}$ en multipliant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement par $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$, faisant la somme, et prenant dans cette somme le coefficient de y_k,

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{1,k} + \ldots + a_{i,n}\, b_{n,k}.$$

(*) SYLVESTER, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. VII, p. 52.
(**) Voir la démonstration algébrique de la règle de multiplication (§ VI), par exemple, dans Joachimsthal, *Journal de Crelle*, t. XL, p. 22.

Par le § VI, 1, on a

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} \dots & c_{1,n} \\ \dots\dots & \dots \\ c_{n,1} \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} \dots & a_{1,n} \\ \dots\dots & \dots \\ a_{n,1} \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \dots & b_{1,n} \\ \dots\dots & \dots \\ b_{n,1} \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3. Étant données les équations algébriques $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, de degrés m et n respectivement, si par la substitution

$$x = \frac{py + qz}{p'y + q'z},$$

on les transforme dans les équations

$$(p'y + q'z)^m f\left(\frac{py + qz}{p'y + q'z}\right) = 0,$$
$$(p'y + q'z)^n \varphi\left(\frac{py + qz}{p'y + q'z}\right) = 0,$$

et que l'on désigne en outre par $R = 0$ la résultante des équations données, et par $R' = 0$ la résultante des équations transformées, on aura

$$R' = (pq' - p'q)^{mn} R \ (^*).$$

Démonstration. — En admettant que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ désignent les racines de l'équation $f(x) = 0$, et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ celles de l'équation $\varphi(x) = 0$, on a identiquement

$$f(x) = a_m(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_m),$$
$$\varphi(x) = b_n(x - \beta_1)(x - \beta_2)\dots(x - \beta_n),$$

et par suite

$$u^m f\left(\frac{t}{u}\right) = a_m(t - \alpha_1 u)(t - \alpha_2 u)\dots(t - \alpha_m u),$$
$$u^n \varphi\left(\frac{t}{u}\right) = b_n(t - \beta_1 u)(t - \beta_2 u)\dots(t - \beta_n u).$$

(*) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XL, p. 245. — SALMON, *Higher plane curves*, p. 295.

La résultante des équations

$$u^m f\left(\frac{t}{u}\right) = 0, \quad \text{et} \quad u^n \varphi\left(\frac{t}{u}\right) = 0$$

est, de même que la résultante des équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, d'après le § XI, 1,

$$\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k) = 0,$$

$\alpha_i - \beta_k$ étant évidemment le déterminant des fonctions linéaires

$$t - \alpha_i u, \quad t - \beta_k u.$$

Par la substitution linéaire

$$t = py + qz,$$
$$u = p'y + p'z,$$

le déterminant de $t - \alpha_i u$ et de $t - \beta_k u$ se change (2) en

$$(\alpha_i - \beta_k)(pq' - p'q),$$

et par conséquent

$$(pq' - p'q)^{mn} \prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k) = 0$$

est la résultante des équations transformées

$$(p'y + q'z)^m f\left(\frac{py + qz}{p'y + q'z}\right) = 0,$$
$$(p'y + q'z)^n \varphi\left(\frac{py + qz}{p'y + q'z}\right) = 0.$$

Remarque. — Si l'équation $f(x) = 0$ est transformée, par la substitution

$$x = \frac{py + qz}{p'y + q'z},$$

en la suivante

$$(p'y + q'z)^m f\left(\frac{py + qz}{p'y + q'z}\right) = 0,$$

on trouvera, en procédant de la même manière, que le déterminant de l'équation transformée se déduit du déterminant de l'équation proposée (§ XII, 9), en multipliant par $(pq' - p'q)^{m(m-1)}$, parce que $\prod\limits_{i,k} (\alpha_i - \alpha_k)$ est un produit de $m(m-1)$ différences qui peuvent être considérées comme des déterminants de fonctions linéaires.

4. Une fonction f des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant transformée, par une substitution linéaire, en une fonction des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, le déterminant de la fonction transformée est égal au produit du déterminant de la fonction donnée (§ XIII, 3) par le carré du déterminant de la substitution linéaire (*).

Démonstration. — Supposons la fonction f transformée par la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{1,1}y_1 + \ldots + b_{1,n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= b_{n,1}y_1 + \ldots + b_{n,n}y_n. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dy_i\, dy_k} &= \frac{d^2 f}{dy_i\, dx_1}\frac{dx_1}{dy_k} + \ldots + \frac{d^2 f}{dy_i\, dx_n}\frac{dx_n}{dy_k} \\ &= \frac{d^2 f}{dy_i\, dx_1} b_{1,k} + \ldots + \frac{d^2 f}{dy_i\, dx_n} b_{n,k}, \end{aligned}$$

(*) HESSE, *Journal de Crelle*, t. XXVIII, p. 89. Le cas où la fonction f est quadratique a été traité, pour $n = 2$, par Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773, p. 285), et pour $n = 3$, par Gauss (*Disq. arithm.*, 268).

et par suite (§ VI, 1)

$$(A)\quad \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dy_1\,dy_1} \cdots \frac{d^2f}{dy_1\,dy_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^2f}{dy_n\,dy_1} \cdots \frac{d^2f}{dy_n\,dy_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dy_1\,dx_1} \cdots \frac{d^2f}{dy_1\,dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^2f}{dy_n\,dx_1} \cdots \frac{d^2f}{dy_n\,dx_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \ldots b_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n,1} \ldots b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On a de plus,

$$\frac{df}{dy_i} = \frac{df}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_i} + \ldots + \frac{df}{dx_n}\frac{dx_n}{dy_i}$$

$$= \frac{df}{dx_1} b_{1,i} + \ldots + \frac{df}{dx_n} b_{n,i},$$

$$\frac{d^2f}{dy_i\,dx_k} = \frac{d^2f}{dx_1\,dx_k} b_{1,i} + \ldots + \frac{d^2f}{dx_n\,dx_k} b_{n,i},$$

et par suite, comme précédemment,

$$(B)\quad \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dy_1\,dx_1} \cdots \frac{d^2f}{dy_1\,dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^2f}{dy_n\,dx_1} \cdots \frac{d^2f}{dy_n\,dx_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx_1\,dx_1} \cdots \frac{d^2f}{dx_1\,dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^2f}{dx_n\,dx_1} \cdots \frac{d^2f}{dx_n\,dx_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \ldots b_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n,1} \ldots b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En multipliant entre elles les équations (A) et (B), il vient

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dy_1\,dy_1} \cdots \frac{d^2f}{dy_1\,dy_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^2f}{dy_n\,dy_1} \cdots \frac{d^2f}{dy_n\,dy_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx_1\,dx_1} \cdots \frac{d^2f}{dx_1\,dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^2f}{dx_n\,dx_1} \cdots \frac{d^2f}{dx_n\,dx_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} \ldots b_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n,1} \ldots b_{n,n} \end{vmatrix}^2.$$

5. Parmi les substitutions linéaires au moyen desquelles on peut transformer une fonction donnée, on doit particulièrement remarquer celles dans lesquelles la somme des carrés des nouvelles variables ne diffère pas de la somme

des carrés des variables primitives. Ces substitutions ont été considérées par Euler (*Nov. Comm. Petropol.*, t. XV, p. 75; t. XX, p. 217); par Cauchy (*Exerc. de Math.*, t. IV, p. 140); par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XII, p. 7); par Cayley (*Journal de Crelle*, t. XXXII, p. 119), et d'après une remarque de ce dernier auteur, elles ont reçu le nom de *substitutions orthogonales*.

Si la fonction donnée dépend des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et qu'on la transforme, par la substitution linéaire (orthogonale)

$$x_1 = c_{1,1}y_1 + \ldots + c_{1,n}y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = c_{n,1}y_1 + \ldots + c_{n,n}y_n,$$

en une fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de sorte que l'on ait

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

les coefficients jouiront des propriétés principales suivantes.

I. Pour toutes les valeurs de i et de k, depuis 1 jusqu'à n, on a (Euler)

$$c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \ldots + c_{n,i}^2 = 1,$$
$$c_{1,i}\,c_{1,k} + c_{2,i}\,c_{2,k} + \ldots + c_{n,i}\,c_{n,k} = 0,$$

à cause de l'identité

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$
$$= (c_{1,1}y_1 + \ldots c_{1,n}y_n)^2 + \ldots + (c_{n,1}y_1 + \ldots + c_{n,n}y_n)^2$$
$$= y_1^2(c_{1,1}^2 + \ldots + c_{n,1}^2) + \ldots + 2y_1y_2(c_{1,1}c_{1,2} + \ldots + c_{n,1}c_{n,2}) + \ldots$$

II. Pour transformer la fonction transformée dans la fonction proposée, il suffit (Cauchy) de substituer les valeurs

$$y_i = c_{1,i}x_1 + c_{2,i}x_2 + \ldots + c_{n,i}x_n.$$

En effet

$$c_{1,i}x_1 + \ldots + c_{n,i}x_n = y_1(c_{1,i}c_{1,1} + \ldots + c_{n,i}c_{n,1}) + \ldots$$
$$+ y_n(c_{1,i}c_{1,n} + \ldots + c_{n,i}c_{n,n}),$$

le coefficient de y_i ayant pour valeur l'unité, tandis que les coefficients des autres quantités s'annulent (I).

III. Le carré du déterminant d'une substitution orthogonale est égal à l'unité (Jacobi). Car par la règle de la multiplication (§ VI, 3) on a

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{1,1} & \ldots & d_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n,1} & \ldots & d_{n,n} \end{vmatrix},$$

en faisant

$$d_{i,k} = c_{1,i}c_{1,k} + c_{2,i}c_{2,k} + \ldots + c_{n,i}c_{n,k}.$$

Or on a $d_{i,k} = 0$, $d_{i,i} = 1$ (I); par suite le déterminant cherché se réduit à son terme initial $d_{1,1}\, d_{2,2} \ldots d_{n,n} = 1$ (§ II, 7)

IV. En désignant par ε le déterminant d'une substitution orthogonale, et par $\gamma_{i,k}$ le coefficient de $c_{i,k}$ dans ε, on a (Jacobi)

$$\gamma_{i,k} = \varepsilon c_{i,k}.$$

Pour prouver cette identité, multiplions les identités

$$c_{1,1}c_{1,k} + \ldots + c_{n,1}c_{n,k} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{1,k}c_{1,k} + \ldots + c_{n,k}c_{n,k} = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{1,n}c_{1,k} + \ldots + c_{n,n}c_{n,k} = 0,$$

respectivement par $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \ldots, \gamma_{i,n}$. On obtient, en faisant la somme,

$$c_{1,k}(c_{1,1}\gamma_{i,1} + \ldots + c_{1,n}\gamma_{i,n}) + \ldots + c_{i,k}(c_{i,1}\gamma_{i,1} + \ldots + c_{i,n}\gamma_{i,n})$$
$$+ \ldots + c_{n,k}(c_{n,1}\gamma_{i,1} + \ldots c_{n,n}\gamma_{i,n}) = \gamma_{i,k}.$$

Le coefficient de $c_{i,k}$ est ε, et ceux des autres quantités $c_{1,k}, \ldots, c_{n,k}$ s'annulent (§ III, 1).

V. Les coefficients d'une substitution orthogonale satisfont au nouveau système suivant d'identités (Euler) :

$$c_{i,1}^2 + c_{i,2}^2 + \ldots + c_{i,n}^2 = 1,$$
$$c_{i,1}\, c_{k,1} + c_{i,2}\, c_{k,2} + \ldots + c_{i,n}\, c_{k,n} = 0.$$

On a en effet (IV)

$$\varepsilon(c_{i,1}\, c_{k,1} + \ldots c_{i,n}\, c_{k,n}) = \gamma_{i,1}\, c_{k,1} + \ldots + \gamma_{i,n}\, c_{k,n}.$$

Or cette somme a pour valeur ε ou zéro, suivant que i et k sont égaux ou inégaux (§ III, 1).

VI. Entre les déterminants partiels que l'on peut former avec le système des coefficients d'une substitution orthogonale, il existe la relation suivante (Jacobi) :

$$\begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \ldots & c_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,m+1} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m,1} & \ldots & c_{m,m} \end{vmatrix}.$$

On a en effet (§ VII, 2)

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & \ldots & \gamma_{1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{m,1} & \ldots & \gamma_{m,m} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m-1} \begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \ldots & c_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,m+1} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

et, d'après (IV), en ayant égard au § III, 2,

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & \ldots & \gamma_{1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{m,1} & \ldots & \gamma_{m,m} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m} \begin{vmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m,1} & \ldots & c_{m,m} \end{vmatrix}.$$

La comparaison de ces deux identités conduit à celle qu'il fallait démontrer.

Il y a encore quelques relations moins immédiates entre les coefficients d'une substitution orthogonale, qui ont été indiquées par Euler dans le premier des Mémoires cités, et par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XXX, p. 46).

6. Puisque entre les n^2 coefficients d'une substitution orthogonale il existe $n + \frac{n(n-1)}{2}$ équations (5, I), ces coefficients peuvent être considérés comme des fonctions de $n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ quantités indéterminées

$$\begin{array}{cccc} b_{1,2}, & b_{1,3}, \ldots, & b_{1,n}, \\ & b_{2,3}, \ldots, & b_{2,n}, \\ & & \ldots\ldots\ldots \\ & & b_{n-1,n}. \end{array}$$

Effectivement, Euler a non-seulement indiqué le moyen par lequel on peut, par $\frac{n(n-1)}{2}$ transformations binaires, mettre les coefficients d'une substitution orthogonale sous forme de fonctions de $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités indéterminées; mais encore, pour les cas de $n=3$ et de $n=4$, il a exprimé ces coefficients rationnellement au moyen des quantités indéterminées. En se servant des déterminants, Cayley (*l. c.*) est parvenu à représenter les coefficients d'une substitution orthogonale servant à la transformation d'une fonction de n variables, par des fonctions rationnelles de $\frac{n(n-1)}{1}$ indéterminées.

Si l'on désigne, en effet, comme plus haut, ces indéterminées, par $b_{1,2}, \ldots, b_{n-1}$; si de plus, sous les conditions,

$$b_{i,k} + b_{k,i} = 0, \quad b_{i,i} = \omega,$$

on forme le déterminant

$$B = \begin{vmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

et que l'on désigne par $\beta_{i,k}$ le coefficient de $b_{i,k}$ dans B, on aura

$$c_{i,k} = \frac{2\omega\beta_{i,k}}{B}, \quad c_{i,i} = \frac{2\omega\beta_{i,i} - B}{B},$$

pour les formules générales d'une substitution orthogonale dont le déterminant a pour valeur l'unité. Les coefficients d'une substitution orthogonale de déterminant -1 s'obtiennent en changeant les signes d'un nombre impair de lignes parallèles, dans le système des coefficients qu'on vient de trouver.

Démonstration. — On peut faire dépendre les quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$ des quantités $y_1, y_2, \dots, y_n$, en posant à la fois

$$x_i = b_{i,1} z_1 + \dots + b_{i,n} z_n,$$
$$y_i = b_{1,i} z_1 + \dots + b_{n,i} z_n.$$

Par la résolution des systèmes linéaires

$$x_1 = b_{1,1} z_1 + \dots + b_{1,n} z_n, \quad y_1 = b_{1,1} z_1 + \dots + b_{n,1} z_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = b_{n,1} z_1 + \dots + b_{n,n} z_n, \quad y_n = b_{1,n} z_1 + \dots + b_{n,n} z_n,$$

on trouve (§ IX, 1)

$$B z_i = \beta_{1,i} x_1 + \beta_{2,i} x_2 + \dots + \beta_{n,i} x_n,$$
$$B z_i = \beta_{i,1} y_1 + \beta_{i,2} y_2 + \dots + \beta_{i,n} y_n.$$

Or en vertu des hypothèses $b_{i,k} + b_{k,i} = 0$, $b_{i,i} = \omega$, et des relations supposées entre x_i, y_i et les quantités z_1,

$z_2, \ldots, z_n$, on a

$$x_i + y_i = 2\omega z_i,$$

et par suite on a à la fois

$$\begin{aligned} \mathrm{B} y_i &= 2\omega\beta_{1,i} x_1 + \ldots + (2\omega\beta_{i,i} - \mathrm{B}) x_i + \ldots + 2\omega\beta_{n,i} x_n, \\ \mathrm{B} x_i &= 2\omega\beta_{i,1} y_1 + \ldots + (2\omega\beta_{i,i} - \mathrm{B}) y_i + \ldots + 2\omega\beta_{i,n} y_n, \end{aligned}$$

ou, sous une forme plus abrégée,

$$\begin{aligned} y_i &= c_{1,i} x_1 + \ldots + c_{n,i} x_n, \\ x_i &= c_{i,1} y_1 + \ldots + c_{i,n} y_n. \end{aligned}$$

De l'identité

$$y_i = c_{1,i}(c_{1,1} y_1 + \ldots + c_{1,n} y_n) + \ldots + c_{n,i}(c_{n,1} y_1 + \ldots + c_{n,n} y_n),$$

résultent les identités

$$\begin{aligned} 1 &= c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \ldots + c_{n,i}^2, \\ 0 &= c_{1,i} c_{1,k} + c_{2,i} c_{2,k} + \ldots + c_{n,i} c_{n,k}, \end{aligned}$$

qui font voir que ces fonctions rationnelles des indéterminées $b_{1,2}, \ldots, b_{n-1,n}$ présentent le caractère des coefficients d'une substitution orthogonale (5, I).

Désignons par ε le déterminant de cette substitution orthogonale. On a alors (§ III, 2)

$$\begin{vmatrix} \beta_{1,1} - \frac{\mathrm{B}}{2\omega} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \ldots \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} - \frac{\mathrm{B}}{2\omega} & \beta_{2,3} & \ldots \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} - \frac{\mathrm{B}}{2\omega} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \varepsilon \left(\frac{\mathrm{B}}{2\omega}\right)^n.$$

En multipliant ce déterminant $\mathrm{B}\omega^n$, on trouve (§ VI, 4)

$$\varepsilon \mathrm{B} \left(\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^n = \begin{vmatrix} h_{1,1} & \ldots & h_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n,1} & \ldots & h_{n,n} \end{vmatrix},$$

en posant

$$h_{i,k} = \beta_{i,1}\, b_{k,1}\,\omega + \ldots + \left(\beta_{i,i} - \frac{B}{2\omega}\right) b_{k,i}\,\omega + \ldots + \beta_{i,n}\, b_{k,n}\,\omega$$

$$= -\frac{B}{2\omega}\, b_{k,i}\,\omega = \frac{B}{2}\, b_{i,k} \;(\S\ \text{III},\ 1),$$

$$h_{i,i} = \beta_{i,1}\, b_{i,1}\,\omega + \ldots + \left(\beta_{i,i} - \frac{B}{2\omega}\right) b_{i,i}\,\omega + \ldots + \beta_{i,n}\, b_{i,n}\,\omega$$

$$= B\omega - \frac{B}{2}\, b_{i,i} = \frac{B}{2}\, b_{i,i}.$$

En substituant ces valeurs, il vient (§ III, 2)

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & \ldots & h_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n,1} & \ldots & h_{n,n} \end{vmatrix} = B\left(\frac{B}{2}\right)^n,$$

et par suite $\varepsilon = 1$. Si enfin on donne des signes contraires aux coefficients

$$c_{1,i}, \quad c_{2,i}, \ldots, \quad c_{n,i},$$

ou aux coefficients

$$c_{k,1}, \quad c_{k,2}, \ldots, \quad c_{k,n},$$

le déterminant de la substitution change de signe (§ III, 1), tandis que les équations caractéristiques (5, I et V)

$$c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \ldots + c_{n,i}^2 = 1,$$
$$c_{1,i}\, c_{1,k} + c_{2,i}\, c_{2,k} + \ldots + c_{n,i}\, c_{n,k} = 0,$$

ou

$$c_{k,1}^2 + c_{k,2}^2 + \ldots + c_{k,n}^2 = 1,$$
$$c_{k,1}\, c_{i,1} + c_{k,2}\, c_{i,2} + \ldots + c_{k,n}\, c_{i,n} = 0,$$

n'éprouvent aucun changement

Exemples. — Pour $n = 2$, on trouve

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2.$$

Les coefficients des différents éléments dans B sont

$$\begin{matrix} 1, & \lambda, \\ -\lambda, & 1. \end{matrix}$$

Donc les coefficients d'une substitution orthogonale binaire de déterminant 1 sont les suivants :

$$\begin{matrix} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, & \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \\ -\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}, & \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}. \end{matrix}$$

Le déterminant aura pour valeur -1, si l'on donne aux coefficients les valeurs

$$\begin{matrix} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, & \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \\ \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}, & -\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}. \end{matrix}$$

Pour $n=3$, on trouve (§ VIII, 7)

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2.$$

Les coefficients des divers éléments dans B sont

$$\begin{matrix} 1+\lambda^2, & \nu+\lambda\mu, & -\mu+\lambda\nu, \\ -\nu+\lambda\mu, & 1+\mu^2, & \lambda+\mu\nu, \\ \mu+\lambda\nu, & -\lambda+\mu\nu, & 1+\nu^2. \end{matrix}$$

On trouve, d'après cela, les valeurs suivantes pour les coefficients d'une substitution orthogonale ternaire de déterminant 1 :

$$\begin{matrix} \dfrac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{B}, & 2\dfrac{\nu+\lambda\mu}{B}, & 2\dfrac{-\mu+\lambda\nu}{B}, \\ 2\dfrac{-\nu+\lambda\mu}{B}, & \dfrac{1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2}{B}, & 2\dfrac{\lambda+\mu\nu}{B}, \\ 2\dfrac{\mu+\lambda\nu}{B}, & 2\dfrac{-\lambda+\mu\nu}{B}, & \dfrac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{B}, \end{matrix}$$

comme Euler l'avait déjà annoncé dans le Mémoire que nous avons cité en premier lieu, p. 101. Ces coefficients ont été déduits par Rodrigues (*Journal de Liouville*, t. V, p. 405) des formules mêmes qu'Euler a établies (*Nov. Comm. Petropol.*, t. XX, p. 217) pour la transformation d'un système trirectangulaire de coordonnées.

Pour obtenir les coefficients d'une substitution orthogonale ternaire de déterminant -1, il suffit de changer, dans le système ci-dessus, les signes d'une ou de trois lignes horizontales, ou d'un pareil nombre de lignes verticales.

Pour $n=4$, on trouve (§ VIII, 7)

$$B=\begin{vmatrix} \omega & a & b & c \\ -a & \omega & h & -g \\ -b & -h & \omega & f \\ -c & g & -f & \omega \end{vmatrix} = (\omega^2+a^2+b^2+c^2+f^2+g^2+h^2+\theta^2)\omega^2,$$

$$\omega\theta = af+bg+ch.$$

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= (\omega^2+f^2+g^2+h^2)\omega^2, & \beta_{12} &= (a\omega+f\theta-bh+cg)\omega,\\
\beta_{21} &= (-a\omega-f\theta+cg-bh)\omega, & \beta_{22} &= (\omega^2+f^2+b^2+c^2)\omega^2,\\
\beta_{31} &= (-b\omega-cf-g\theta+ah)\omega, & \beta_{32} &= (-h\omega+fg-ab-c\theta)\omega,\\
\beta_{41} &= (-c\omega+bf-ag-h\theta)\omega, & \beta_{42} &= (g\omega+fh+b\theta-ca)\omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{13} &= (b\omega+g\theta-cf+ah)\omega, & \beta_{14} &= (c\omega+h\theta-ag+bf)\omega,\\
\beta_{23} &= (h\omega+fg+c\theta-ab)\omega, & \beta_{24} &= (-g\omega+hf-ac-b\theta)\omega,\\
\beta_{33} &= (\omega^2+g^2+c^2+a^2)\omega^2, & \beta_{34} &= (f\omega+gh+a\theta-bc)\omega,\\
\beta_{43} &= (-f\omega+gh-bc-a\theta)\omega, & \beta_{44} &= (\omega^2+h^2+a^2+b^2)\omega^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Bc_{11} &= [\omega^2-\theta^2+f^2-a^2+g^2-b^2+h^2-c^2]\omega^2,\\
Bc_{22} &= [\omega^2-\theta^2+f^2-a^2-(g^2-b^2)-(h^2-c^2)]\omega^2,\\
Bc_{33} &= [\omega^2-\theta^2-(f^2-a^2)+(g^2-b^2)-(h^2-c^2)]\omega^2,\\
Bc_{44} &= [\omega^2-\theta^2-(f^2-a^2)-(g^2-b^2)+h^2-c^2]\omega^2,
\end{aligned}$$

etc.

A l'aide de ces formules, on peut former immédiatement

les coefficients d'une substitution orthogonale quaternaire, de déterminant 1 ou -1.

Le système de valeurs de ces coefficients, donné par Cayley, dans le *Journal de Crelle*, t. XXXII, p. 122, contient deux erreurs (dans β_{24}, lisez hf au lieu de $-hf$; dans Bc_{11}, Bc_{22}, ..., lisez $1-\theta^2$ au lieu de 1), lesquelles n'existent pas dans la publication plus récente de Cayley, *Journal de Crelle*, t. L, p. 311. Mais, dans ce dernier Mémoire, p. 312, l. 5, il y a une faute d'impression à corriger, lisez $-\delta\gamma'$ au lieu de $+\delta\gamma'$. Les coefficients trouvés par Cayley pour une substitution orthogonale quaternaire ont été donnés sous une autre forme par Euler (*Nov. Comm. Petrop.*, t. XV, p. 102), qui les avait obtenus, dit-il, « *nulla certa methodo, sed potius quasi divinando.* » Euler ajoute : « *Si quis viam directam ad hanc solutionem manuducentem investigaverit*, *insignia certe subsidia analysi attulisse erit censendus.* » Cayley n'a pas manqué de se rendre compte comment des coefficients qu'il a déterminés on peut déduire la solution d'Euler (voir *Journal de Crelle*, t. L, p. 312). En posant, dans le système ci-dessus,

$$\omega=-\frac{s+d}{2},\quad f=\frac{r+c}{2},\quad g=-\frac{q+b}{2},\quad h=\frac{p+a}{2},$$

$$\theta=\frac{s-d}{2},\quad a=\frac{r-c}{2},\quad b=-\frac{q-b}{2},\quad c=\frac{p-a}{2},$$

et changeant les signes de la dernière ligne horizontale, ce qui fait prendre au déterminant de la substitution orthogonale la valeur -1, on obtient sans aucun changement le système d'Euler. Car le second élément de la seconde ligne horizontale est écrit, dans le Mémoire d'Euler, par une faute d'impression, $-ds$ au lieu de $+ds$.

7. Les substitutions orthogonales binaires et ternaires

équivalent, en géométrie, à la transformation des coordonnées rectangulaires. Pour passer du système rectangulaire x, y, au système rectangulaire x', y', en supposant que x, y, x', y' soient des directions situées dans un même plan, il faut faire la substitution linéaire qui a pour coefficients

$$\begin{matrix} \cos xx', & \cos xy', \\ \cos yx', & \cos yy'. \end{matrix}$$

Si l'on donne le même signe aux angles décrits par des rotations de même sens, de sorte que

$$xy + yx = 0,$$

on a

$$xy' = xx' + x'y', \quad yx' = yx + xx', \quad yy' = yx + xx' + x'y'.$$

Si maintenant les angles xy et $x'y'$ sont tous les deux $= 90°$, on a

$$\cos xy' = -\sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = \cos xx'.$$

Si au contraire $xy = 90°$ et $x'y' = -90°$, alors

$$\cos xy' = \sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = -\cos xx'.$$

On a donc, comme on le sait d'ailleurs, pour passer à un système de même sens, à faire la substitution linéaire

$$\begin{matrix} \cos xx', & -\sin xx', \\ \sin xx', & \cos xx', \end{matrix}$$

de déterminant 1. Pour passer à un système de sens contraire, on devra faire la substitution

$$\begin{matrix} \cos xx', & \sin xx', \\ \sin xx', & -\cos xx', \end{matrix}$$

de déterminant -1.

Ce qui précède s'accorde avec un théorème goniomé-

trique connu (*voir* ci-après, § XVII, 1), d'après lequel, pour des directions quelconques x, y, x', y' dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix} = \sin xy \sin x'y',$$

d'où il suit que ce déterminant est positif ou négatif, suivant que $\sin xy$ et $\sin x'y'$ sont ou ne sont pas de même signe.

Réciproquement, des équations

$$\cos^2 xx' + \cos^2 xy' = 1, \quad \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' = 0,$$
$$\cos^2 yx' + \cos^2 yy' = 1,$$

on conclut que $\sin^2 xy$ et $\sin^2 x'y'$ ont pour valeur l'unité. On a, en effet, par la règle de la multiplication (§ VI, 4),

$$\sin^2 xy \sin^2 x'y' = \begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} \cos^2 xx' + \cos^2 xy', & \cos yx' \cos xx' + \cos xy' \cos yy' \\ \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy', & \cos^2 yx' + \cos^2 yy' \end{vmatrix} = 1.$$

Pour rendre les substitutions rationnelles, il suffit de prendre les formules $\cos xx' = \cos^2\frac{xx'}{2}\left(1 - \tang^2\frac{xx'}{2}\right)$, etc., et d'exprimer les coefficients de la substitution au moyen de $\tang\frac{xx'}{2}$. *Voir* 6, exemple 1.

8. Pour passer du système de coordonnées rectangulaires x, y, z au système de coordonnées rectangulaires x', y', z', il faut employer, comme on sait, la substitution linéaire

$$\begin{matrix} \cos xx', & \cos xy', & \cos xz', \\ \cos yx', & \cos yy', & \cos yz', \\ \cos zx', & \cos zy', & \cos zz', \end{matrix}$$

dont les coefficients doivent satisfaire aux équations (5, I), et sont par conséquent fonctions de trois quantités indéterminées. Soit O l'origine commune des deux systèmes de coordonnées, et soient X, Y, Z, X', Y', Z' les points où les directions des coordonnées positives rencontrent la sphère de centre O et de rayon égal à l'unité. Les systèmes de coordonnées seront de même sens ou de sens contraire, suivant que les triangles sphériques XYZ et X'Y'Z', ou les tétraèdres OXYZ, OX'Y'Z' seront de même sens ou de sens opposé.

I. Deux figures sphériques étant semblables, égales et de même sens, il existe un point S, qui est à lui-même son propre correspondant, et qui est situé de telle sorte que l'on a

$$\mathrm{SX} = \mathrm{SX}', \qquad \mathrm{SY} = \mathrm{SY}', \qquad \mathrm{SZ} = \mathrm{SZ}',$$
$$\text{angle } \mathrm{XSY} = \mathrm{X'SY'}, \quad \mathrm{YSZ} = \mathrm{Y'SZ'}, \quad \mathrm{XSZ} = \mathrm{X'SZ'},$$
$$\mathrm{XSX'} = \mathrm{YSY'} = \mathrm{ZSZ'} \text{ (*)}.$$

D'après une proposition élémentaire de trigonométrie sphérique, on a par conséquent, en désignant OS par s et l'angle XSX' par φ,

$$\cos xx' = \cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = \cos^2 sx\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi,$$
$$\cos yy' = \cos^2 sy + \sin^2 sy \cos\varphi = \cos^2 sy\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi,$$
$$\cos zz' = \cos^2 sz + \sin^2 sz \cos\varphi = \cos^2 sz\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi.$$

En désignant, de plus, par θ les angles égaux XSY, X'SY', on a, d'après la même proposition de trigonométrie,

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy' + \sin sx \sin sy' \cos(\varphi + \theta)$$
$$= \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\varphi \cos\theta - \sin sx \sin sy \sin\varphi \sin\theta.$$

(*) *Voir* le Mémoire de l'auteur *Sur l'égalité et la similitude, etc.* Dresde, 1852, §§ 31 et 52. Aux sources qui y sont citées il faut ajouter : EULER, *De centro similitudinis* (*Nova Acta Petrop.*, t. IX, p. 154).

Mais, à cause de

$$\cos xy = \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\theta = 0,$$
$$\sin sx \sin sy \sin\theta = 6\,\mathrm{OXYS} = \sin xy \cos sz = \cos sz,$$

il vient

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy\,(1 - \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi.$$

De la valeur de $\cos xy'$ on tire celle de $\cos yx'$, puisque l'angle $\mathrm{YSX}' = \mathrm{YSX} + \mathrm{XSX}' = -\varphi + \theta$, d'où l'on voit qu'il suffit de changer φ en $-\varphi$, pour avoir

$$\cos yx' = \cos sx \cos sy\,(1 - \cos\varphi) + \cos sz \sin\varphi.$$

On a de même

$$\cos yz' = \cos sy \cos sz\,(1 - \cos\varphi) - \cos sx \sin\varphi,$$
$$\cos zy' = \cos sy \cos sz\,(1 - \cos\varphi) + \cos sx \sin\varphi,$$
$$\cos zx' = \cos sz \cos sx\,(1 - \cos\varphi) - \cos sy \sin\varphi,$$
$$\cos xz' = \cos sz \cos sx\,(1 - \cos\varphi) + \cos sy \sin\varphi \;(*),$$

les trois premières des quantités auxiliaires sx, sy, sz, φ étant liées entre elles par l'équation

$$\cos^2 sx + \cos^2 sy + \cos^2 sz = 1.$$

Pour rendre rationnels ces coefficients de la substitution, introduisons $\frac{1}{2}\varphi$; il vient

$$\cos xx' = \cos^2\frac{1}{2}\varphi + 2\cos^2 sx \sin^2\frac{1}{2}\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\varphi,$$

$$\cos xy' = 2\cos sx \cos sy \sin^2\frac{1}{2}\varphi - 2\cos sz \sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi,$$

(*) Ce sont là les formules trouvées par Euler, *Nov. Comm. Petrop.*, t. XX, p. 217, formules que Jacobi a rappelées (*Journal de Crelle*, t. II, p. 188), en invitant les géomètres à en simplifier la démonstration.

et de même pour les autres. En posant

$$\cos sx \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \lambda, \quad \cos sy \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \mu, \quad \cos sz \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \nu,$$

d'où résulte

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

on obtient le système ci-dessus de coefficients rationnels d'une substitution orthogonale ternaire (6).

II. Deux figures sphériques étant semblables, égales et de sens opposé, il existe un grand cercle, son propre correspondant à lui-même, dont le pôle S a pour correspondant le point diamétralement opposé, et tel qu'on a

$$SX + SX' = 180^\circ, \quad SY + SY' = 180^\circ, \quad SZ + SZ' = 180^\circ,$$
$$\text{angle } XSY = X'SY', \qquad YSZ = Y'SZ', \qquad XSZ = X'SZ',$$
$$XSX' = YSY' = ZSZ'.$$

En employant toujours les notations précédentes, on a

$$\cos xx' = -\cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = -\cos^2 sx(1 + \cos\varphi) + \cos\varphi,$$
$$\cos xy' = -\cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos(\varphi + \theta)$$
$$= -\cos sx \cos sy\,(1 + \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi,$$
etc.

Ces formules ne diffèrent que par le signe de celles qu'on a trouvées précédemment, en y changeant φ en $180^\circ - \varphi$. L'angle $180^\circ - \varphi$ est celui que le système x', y', z' doit décrire autour de l'axe s, pour que $X'Y'Z'$ coïncide avec la figure symétrique de XYZ.

III. D'après le théorème de v. Staudt (*voir* ci-après, § XVII, 6), on a, pour des angles et des positions quelcon-

ques des axes coordonnés,

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{vmatrix} = 36\,\text{OXYZ}.\text{OX}'\text{Y}'\text{Z}'.$$

Par suite, le déterminant est positif ou négatif, suivant que ces tétraèdres, ou les angles solides formés par les axes, sont disposés dans le même sens ou en sens contraire. Dans un système rectangulaire, le tétraèdre correspondant a pour mesure $\frac{1}{6}$ de l'unité cubique; donc le déterminant de la substitution orthogonale sera $+1$ ou -1, suivant que le nouveau système sera disposé dans le même sens que l'ancien, ou en sens contraire (*).

IV. Réciproquement, des équations

$$\begin{gathered} \cos^2 xx' + \cos^2 xy' + \cos^2 xz' = 1, \\ \cos^2 yx' + \cos^2 yy' + \cos^2 yz' = 1, \\ \cos^2 zx' + \cos^2 zy' + \cos^2 zz' = 1, \\ \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0, \\ \cos xx' \cos zx' + \cos xy' \cos zy' + \cos xz' \cos zz' = 0, \\ \cos yx' \cos zx' + \cos yy' \cos zy' + \cos yz' \cos zz' = 0, \end{gathered}$$

on conclut que les systèmes x, y, z et x', y', z' sont rectangulaires (**). On a, en effet,

$$(36\,\text{OXYZ}.\text{OX}'\text{Y}'\text{Z}')^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

en faisant, d'après la règle de la multiplication des déter-

(*) C'est Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XV, p. 309) qui a fait remarquer ce caractère distinctif des déterminants des substitutions. *Voir* MOEBIUS, *Statique*, § 127; MAGNUS, *Géométrie analytique de l'espace*, § 13.

(**) DEDEKIND, *Journal de Crelle*, t. L, p. 272.

minants (§ VI, 1),

$$a_{11} = \cos xx' \cos xx' + \cos xy' \cos xy' + \cos xz' \cos xz' = 1,$$
$$a_{12} = \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0,$$

etc., de sorte qu'on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

On a maintenant

$$6\text{OXYZ} = \sin xy \sin xz \sin \left(\widehat{xy, xz}\right), \text{ etc.}$$

Mais le produit des sinus n'est égal à l'unité que lorsque les angles sont droits.

9. En désignant par $c_{1,1}, \ldots, c_{n,n}$ les coefficients d'une substitution orthogonale ayant pour déterminant ε, c'est-à-dire $+1$ ou -1, et posant

$$f(z) = \begin{vmatrix} c_{1,1} + z & c_{1,2} & \ldots c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} + z & \ldots c_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots c_{n,n} + z \end{vmatrix},$$

l'équation $f(z) = 0$ est réciproque, et, à l'exception de la racine $-\varepsilon$, qui y satisfait dans le cas de n impair, elle n'a aucune racine réelle (*).

Démonstration. — Le développement du déterminant $f(z)$ suivant les puissances ascendantes de z (§ IV, 4) permet, au moyen de la propriété, démontrée dans l'art. 5, VI, des déterminants partiels appartenant à $f(0)$, de reconnaître immédiatement que les coefficients de z^0, z^1, z^2, ...

(*) Brioschi, *Journal de Liouville*, t. XIX, p. 253.

ne diffèrent que par le facteur ε des coefficients de z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, ..., et que par conséquent

$$\frac{\varepsilon f(z)}{z^n} = f\left(\frac{1}{z}\right),$$

ce que l'on peut constater en faisant le produit des déterminants ε et $f(z)$. D'après cela, on a

$$f(-\varepsilon) = (-1)^n \varepsilon^{n-1} f(-\varepsilon),$$

et ainsi $f(-\varepsilon)$ devra s'annuler identiquement lorsque n sera un nombre impair. Pour arriver à une conclusion sur la réalité des autres racines de l'équation $f(z) = 0$, formons (§ VI, 4) le produit des déterminants

$$f(z)f(-z) = \begin{vmatrix} d_{1,1} - z^2 & zd_{1,2} & \ldots & zd_{1,n} \\ zd_{2,1} & d_{2,2} - z^2 & \ldots & d_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ zd_{n,1} & zd_{n,2} & \ldots & d_{n,n} - z^2 \end{vmatrix},$$

en posant

$$d_{i,i} - z^2 = c_{i,1}c_{i,1} + \ldots + (c_{i,i} + z)(c_{i,i} - z) + \ldots + c_{i,n}c_{i,n},$$

et par suite

$$d_{i,i} = 1 \quad (\text{5, I}),$$

et

$$zd_{i,k} = c_{i,1}c_{k,1} + \ldots + (c_{i,i} + z)c_{k,i} + \ldots + c_{i,k}(c_{k,k} - z) + \ldots + c_{i,n}c_{k,n},$$

et par suite

$$d_{i,k} = c_{k,i} - c_{i,k},$$

de sorte que $d_{i,k} + d_{k,i} = 0$. On a par conséquent § (VIII, 7)

$$\frac{f(z)f(-z)}{z^n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} - z & d_{1,2} & \ldots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & \frac{1}{z} - z & \ldots & d_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n,1} & d_{n,2} & \ldots & \frac{1}{z} - z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{z} - z\right)^n + \left(\frac{1}{z} - z\right)^{n-2} \Sigma D_2 + \ldots,$$

les coefficients des puissances de $\frac{1}{z} - z$ étant positifs, d'après l'article cité. Donc, pour toute valeur réelle de z, la quantité

$$\frac{f(z)f(-z)}{z^n}, \quad \text{ou} \quad \frac{f(z)f(-z)}{z^n\left(\frac{1}{z}-z\right)},$$

suivant que n est pair ou impair, est positive, et par conséquent $f(z)$ est différent de zéro.

10. Étant donnée une fonction homogène et entière, du second degré, de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\mathrm{V} = \sum_{i,k} a_{i,k} x_i x_k, \quad \text{où} \quad a_{i,k} = a_{k,i},$$

on peut, au moyen de la résolution d'une équation du degré n, la transformer, par une substitution orthogonale déterminée, en une fonction entière et homogène de n variables, qui ne contiendra plus que les carrés des nouvelles variables (*).

Démonstration. — Par les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions exprimant que les produits deux à deux des variables disparaissent de la fonction transformée, la substitution orthogonale qui sert à la transformation se trouve déterminée (6). Or, dans la substitution orthogonale

$$x_i = c_{i,1} y_1 + \ldots + c_{i,n} y_n,$$

on a (5, II)

$$y_i = c_{1,i} x_1 + \ldots + c_{n,i} x_n.$$

(*) CAUCHY, *Exercices de Mathématiques*, t. IV, p. 140. — JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XII, p. 1. — LE BESGUE, *Journal de Liouville*, t. II, p. 357. C'est sur cette proposition que repose analytiquement l'existence des axes principaux rectangulaires des lignes et des surfaces du 2e degré, dont le centre est à une distance finie.

Si l'on doit avoir, par cette substitution,

$$\sum_{i,k} a_{i,k} x_i x_k = g_1 y_1^2 + g_2 y_2^2 + \ldots + g_n y_n^2,$$

il faudra que l'on ait, pour toutes les valeurs de x_1, $x_2, \ldots, x_n$,

$$\sum_{i,k} a_{i,k} x_i x_k = g_1 (c_{1,1} x_1 + \ldots + c_{n,1} x_n)^2 + \ldots$$
$$+ g_n (c_{1,n} x_1 + \ldots + c_{n,n} x_n)^2,$$

et par suite

$$a_{i,k} = g_1 c_{i,1} c_{k,1} + g_2 c_{i,2} c_{k,2} + \ldots + g_n c_{i,n} c_{k,n}.$$

En multipliant les équations

$$a_{i,1} = g_1 c_{i,1} c_{1,1} + \ldots + g_n c_{i,n} c_{1,n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i,n} = g_1 c_{i,1} c_{n,1} + \ldots + g_n c_{i,n} c_{n,n},$$

respectivement par $c_{1,k}, c_{2,k}, \ldots, c_{n,k}$, et faisant la somme, on trouve (5, I)

$$a_{i,1} c_{1,k} + \ldots + a_{i,n} c_{n,k} = g_k c_{i,k}.$$

Du système linéaire

$$\begin{array}{llll} c_{1,k}(a_{1,1} - g_k) & + c_{2,k} a_{1,2} & + \ldots + c_{n,k} a_{1,n} & = 0, \\ c_{1,k} a_{2,1} & + c_{2,k}(a_{2,2} - g_k) & + \ldots + c_{n,k} a_{2,n} & = 0, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ c_{1,k} a_{n,1} & + c_{2,k} a_{n,2} & + \ldots + c_{n,k}(a_{n,n} - g_k) & = 0, \end{array}$$

il résulte enfin (§ IX, 3, et § VII, 5)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - g_k & a_{1,2} & \ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - g_k & \ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots a_{n,n} - g_k \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{1,k} : c_{2,k} : c_{3,k} : \ldots = \sqrt{\varphi_1(g_k)} : \sqrt{\varphi_2(g_k)} : \sqrt{\varphi_3(g_k)} : \ldots,$$

$\varphi_i(z)$ désignant le coefficient de $a_{i,i}-z$ dans le déterminant

$$f(z)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-z & a_{1,2} & \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-z & \dots a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots a_{n,n}-z \end{vmatrix}.$$

Maintenant, à cause de

$$c_{1,k}^2+c_{2,k}^2+\dots+c_{n,k}^2=1,$$

on a, pour déterminer les coefficients de la substitution orthogonale cherchée,

$$\begin{array}{c} c_{1,k} : c_{2,k} : \dots : c_{n,k} : 1 \\ =\sqrt{\varphi_1(g_k)} : \sqrt{\varphi_2(g_k)} : \dots : \sqrt{\varphi_n(g_k)} : \sqrt{\varphi_1(g_k)+\dots+\varphi_n(g_k)}. \end{array}$$

Les quantités $g_1, g_2, \dots, g_n$ sont les racines de l'équation du degré n, $f(z)=0$. Aucune d'elles ne peut être nulle, car $f(0)$ est le déterminant (de Hesse) de la fonction quadratique V, et l'identité $f(0)=0$ indiquerait que V serait en réalité une fonction de moins de n variables (§ XIII, 3).

L'équation $f(z)=0$ ne peut avoir de racines imaginaires ou complexes. En effet, en vertu des proportions précédentes et de l'équation

$$c_{1,i}c_{1,k}+c_{2,i}c_{2,k}+\dots+c_{n,i}c_{n,k}=0,$$

on a, pour chaque couple de racines g_i, g_k,

$$\sqrt{\varphi_1(g_i)}\sqrt{\varphi_1(g_k)}+\dots+\sqrt{\varphi_n(g_i)}\sqrt{\varphi_n(g_k)}=0.$$

Si maintenant on avait

$$g_i=p+q\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \sqrt{\varphi_r(g_i)}=P_r+Q_r\sqrt{-1},$$

il existerait une autre racine $g_k=p-q\sqrt{-1}$, et par

suite $\sqrt{\varphi_r(g_i)} = P_r - Q_r\sqrt{-1}$. De là résulterait

$$\sqrt{\varphi_r(g_i)}\sqrt{\varphi_r(g_k)} = P_r^2 + Q_r^2,$$

et la somme de pareils produits ne pourrait être nulle, à moins que $\varphi_r(g_i)$ ne s'annulât pour $r = 1, 2, \ldots, n$. Or $\varphi_r(z)$ est une fonction du degré $n - 1$ et de même nature que $f(z)$; elle ne peut donc s'annuler pour $z = g_i$ que lorsque des fonctions de même nature et de degré inférieur s'annulent, ce qui est impossible pour des fonctions du premier degré.

Dans le cas où deux ou plusieurs des racines de l'équation $f(z) = 0$ deviennent égales entre elles, la transformation cherchée de la fonction V n'est pas complétement déterminée, parce que deux ou plusieurs lignes parallèles des coefficients de la substitution prennent la valeur $\frac{0}{0}$. En effet, si g_k est une racine double de l'équation $f(z) = 0$, on a, en vertu de l'équation remarquée ci-dessus,

$$\varphi_1(g_k) + \varphi_2(g_k) + \ldots + \varphi_n(g_k) = 0,$$

ce qui s'accorde avec la condition qu'il faut développer, d'après le § III, 10, $f'(g_k) = 0$ (§ XII, 11). Les quantités $\varphi_1(g_k), \varphi_2(g_k), \ldots$ sont de même signe, puisque le produit de deux quelconques d'entre elles est égal à un carré positif (§ VII, 5). Leur somme ne peut donc s'annuler que lorsque chacune d'elles est nulle. Donc, dans les valeurs fractionnaires trouvées pour $c_{1,k}, c_{2,k}, \ldots, c_{n,k}$, les numérateurs s'annulent, ainsi que les dénominateurs.

Remarque. — Par la transformation précédente de la fonction V, on reconnaît les maxima et les minima que présente la fonction donnée lorsque les variables sont assujetties à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Comme on a alors en même temps

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1,$$

il s'ensuit que

$$V = g_1 y_1^2 + g_2 y_2^2 + \ldots + g_n y_n^2$$

$$= g_k + (g_1 - g_k) y_1^2 + \ldots + (g_n - g_k) y_n^2.$$

De là résulte évidemment que V ne peut pas être plus grand (ou plus petit) que g_k, si g_k désigne la plus grande (ou la plus petite) des quantités $g_1, g_2, \ldots, g_n$. La fonction V obtient cette valeur, lorsqu'on fait $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots,$ $y_k = 1, \ldots, y_n = 0$, c'est-à-dire lorsqu'on fait

$$x_1 = c_{1,k}, \quad x_2 = c_{2,k}, \ldots, \quad x_n = c_{n,k}.$$

En traitant directement ce problème, on a les conditions

$$\frac{dV}{dx_1} = 2\mu x_1, \quad \frac{dV}{dx_2} = 2\mu x_2, \ldots, \quad \frac{dV}{dx_n} = 2\mu x_n$$

à satisfaire, et l'on a

$$\frac{dV}{dx_i} = 2a_{i,1} x_1 + 2a_{i,2} x_2 + \ldots + 2a_{i,n} x_n,$$

et par conséquent

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \ldots + a_{i,n} x_n = \mu x_i.$$

Cette équation n'est autre chose que l'équation trouvée ci-dessus,

$$a_{i,1} c_{i,k} + a_{i,2} c_{2,k} + \ldots + a_{i,n} c_{n,k} = g_k c_{i,k},$$

en remplaçant l'inconnue μ par g_k, et les inconnues x_1, $x_2, \ldots, x_n$ par $c_{1,k}, c_{2,k}, \ldots, c_{n,k}$.

11. L'équation $f(z) = 0$, qui se distingue par la réalité de ses racines (10), se présente dans plusieurs recherches,

par exemple, dans la détermination des axes principaux des lignes et des surfaces du second degré, dans la détermination des axes principaux d'inertie d'un corps donné, dans le calcul des inégalités séculaires des planètes (Laplace, *Mémoire de l'Académie de Paris*, 1772, t. II, pp. 293 et 362). Lagrange a démontré la réalité des racines d'une telle équation pour le cas du troisième degré (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773, p. 108). Cauchy (*l. c.*) a démontré cette propriété pour le cas d'une pareille équation de degré quelconque. La réalité des racines pour cette classe d'équations a été démontrée d'une manière nouvelle et directe par Kummer (*Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 268; *voir* Jacobi, *Journal de Crelle*, t. XXX, p. 46), dans le cas du troisième degré, et par Borchardt (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 50), dans le cas d'un degré quelconque. Sylvester (*Philos. Mag.*, 1852, t. II, p. 138) a donné de la même propriété la démonstration suivante, qui n'est pas moins directe (*).

Soient

$$a_{i,k} = a_{k,i}$$

et

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - z & a_{1,2} & \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - z & \dots a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots a_{n,n} - z \end{vmatrix};$$

on aura

$$f(z)f(-z) = \begin{vmatrix} b_{1,1} - z^2 & b_{1,2} & \dots b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} - z^2 & \dots b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots b_{n,n} - z^2 \end{vmatrix};$$

(*) A l'histoire de ce problème se rapportent encore les Notes de Sylvester (*Philosophical Magazine*, 1853, t. II, p. 214) et d'Hermite (*Comptes rendus*, 1855, t. XLI, p. 181).

en posant, d'après la règle de la multiplication des déterminants (§ VI, 4),

$$b_{i,i} - z^2 = a_{i,1}a_{i,1} + \ldots + (a_{i,i} - z)(a_{i,i} + z) + \ldots + a_{i,n}a_{i,n},$$
$$b_{i,k} = a_{i,1}a_{k,1} + \ldots + (a_{i,i} - z)a_{k,i} + \ldots + a_{i,k}(a_{k,k} + z) + \ldots + a_{i,n}a_{k,n},$$

et par conséquent

$$b_{i,i} = a_{i,1}\,a_{i,1} + \ldots + a_{i,n}\,a_{i,n},$$
$$b_{i,k} = a_{i,1}\,a_{k,1} + \ldots + a_{i,n}\,a_{k,n} = b_{k,i}.$$

Le déterminant $f(z)f(-z)$, développé d'après le § IV, 4, donne

$$R_n - z^2 \sum R_{n-1} + \ldots + (-z^2)^{n-1} \sum R_1 + (-z^2)^n,$$

chacune des quantités R_m, telles que

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m,1} & \ldots & b_{m,m} \end{vmatrix},$$

étant une somme de carrés (§ VI, 2). Par conséquent $f(q\sqrt{-1})\,f(-q\sqrt{-1})$ est positif pour toute valeur de q; donc $q\sqrt{-1}$ n'est pas une racine de l'équation $f(z) = 0$.

En posant de plus $z = p + z'$, et changeant $f(z)$ en $F(z')$, alors, pour la même raison, $q\sqrt{-1}$ ne peut être racine de l'équation $F(z') = 0$, et par suite $p + q\sqrt{-1}$ ne peut être racine de l'équation $f(z) = 0$. L'équation $f(z) = 0$ n'a donc que des racines réelles.

§ XVI. — *Surface du triangle et volume du tétraèdre.*

1. Soient O l'origine d'axes coordonnés quelconques; x, y et x_1, y_1 les coordonnées, parallèles aux axes, des deux points A et B; désignons par r, r_1 les longueurs OA, OB, et

prenons, de plus, la surface du triangle OAB positivement ou négativement, suivant que la rotation déterminée par l'ordre des points O, A, B, est ou n'est pas de même sens que la rotation qui sert à décrire les angles positifs. On a alors

$$2\,\mathrm{OAB} = rr_1 \sin rr_1 = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy \ (^*).$$

Démonstration. — Il résulte immédiatement, de l'hypothèse faite sur le signe de l'aire du triangle, que $rr_1 \sin rr_1$ s'accorde aussi pour le signe avec $2\,\mathrm{OAB}$. Mais on a (§ III, 2)

$$r^2 r_1^2 \sin^2 rr_1 = r^2 r_1^2 \begin{vmatrix} 1 & , \cos rr_1 \\ \cos rr_1, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rr & , rr_1 \cos rr_1 \\ rr_1 \cos rr_1, & r_1 r_1 \end{vmatrix}.$$

Or on trouve, au moyen de la projection orthogonale,

$$\begin{aligned} r \cos xr &= x + y \cos xy, \\ r \cos yr &= x \cos xy + y \quad , \\ r &= x \cos xr + y \cos yr, \\ r_1 \cos rr_1 &= x_1 \cos xr + y_1 \cos yr. \end{aligned}$$

La règle de la multiplication des déterminants (§ VI, 1) donne

$$\begin{vmatrix} x(x+y\cos xy)+y\,(x\cos xy+y), & x\,(x_1+y_1\cos xy)+y\,(x_1\cos xy+y_1) \\ x_1(x+y\cos xy)+y_1(x\cos xy+y), & x_1(x_1+y_1\cos xy)+y_1(x_1\cos xy+y_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x+y\cos xy, & x\cos xy+y \\ x_1+y_1\cos xy, & x_1\cos xy+y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & , \cos xy \\ \cos xy, & 1 \end{vmatrix}.$$

(*) Cette formule est contenue dans un théorème de Varignon (*Mém. de Paris*, 1719, p. 66). Elle a été donnée sous sa forme actuelle par Monge, *Journal de l'École Polytechnique*, XV[e] cahier, p. 68. C'est sur elle qu'est fondée la formule pour la surface d'un polygone, que Gauss a insérée dans les *Additions* à la traduction de la *Géométrie de position* de Carnot par Schumacher. On en trouve une démonstration géométrique rigoureuse dans la *Statique* de Mœbius, § 35.

De là résulte, ε étant égal à $+1$ ou à -1,

$$rr_1 \sin rr_1 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy.$$

Lorsque y et x_1 sont nuls, r se change en x, r_1 en y_1. Par conséquent $\varepsilon = 1$.

Remarque. — Si le point B est infiniment voisin du point A, on a

$$r_1 = r + dr,$$
$$x_1 = x + dx,$$
$$y_1 = y + dy.$$

En désignant par θ l'angle xr, on a

$$2\,\mathrm{OAB} = r^2 d\theta = \begin{vmatrix} x & , y \\ x + dx, & y + dy \end{vmatrix} \sin xy = \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} \sin xy,$$

en appliquant le § III, 4.

2. Par *sinus de l'angle solide* (*trièdre*) *formé par trois directions* x, y, z, on entend, d'après v. Staudt (*Journal de Crelle*, t. XXIV, p. 252), le facteur par lequel il faut multiplier le produit des arêtes qui aboutissent à un sommet d'un parallélépipède, pour obtenir le volume du parallélépipède. En désignant ce facteur par $\sin xyz$, on a, comme on sait,

$$\sin xyz = \sin xy \sin \widehat{xy, z} = \sin xy \sin xz \sin \widehat{xy, xz},$$

$\widehat{xy, z}$ et $\widehat{xy, xz}$ désignant les angles que fait le plan xy avec la direction z et avec le plan xz. Par analogie avec l'équation

$$\sin^2 xy = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix},$$

par exemple, dans la détermination des axes principaux des lignes et des surfaces du second degré, dans la détermination des axes principaux d'inertie d'un corps donné, dans le calcul des inégalités séculaires des planètes (Laplace, *Mémoire de l'Académie de Paris*, 1772, t. II, pp. 293 et 362). Lagrange a démontré la réalité des racines d'une telle équation pour le cas du troisième degré (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773, p. 108). Cauchy (*l. c.*) a démontré cette propriété pour le cas d'une pareille équation de degré quelconque. La réalité des racines pour cette classe d'équations a été démontrée d'une manière nouvelle et directe par Kummer (*Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 268; *voir* Jacobi, *Journal de Crelle*, t. XXX, p. 46), dans le cas du troisième degré, et par Borchardt (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 50), dans le cas d'un degré quelconque. Sylvester (*Philos. Mag.*, 1852, t. II, p. 138) a donné de la même propriété la démonstration suivante, qui n'est pas moins directe (*).

Soient

$$a_{i,k} = a_{k,i}$$

et

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - z & a_{1,2} & \ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - z & \ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots a_{n,n} - z \end{vmatrix};$$

on aura

$$f(z)f(-z) = \begin{vmatrix} b_{1,1} - z^2 & b_{1,2} & \ldots b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} - z^2 & \ldots b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots b_{n,n} - z^2 \end{vmatrix};$$

(*) A l'histoire de ce [illegible] (*Philosophical Magazine*, [illegible] Hermite, *Comptes rendus*, 1855, t. XLI, p. [illegible]

la sphère, décrite du centre O avec le rayon 1, aux points X, Y, Z, R, R_1, R_2, les angles solides xyz et rr_1r_2, ainsi que les tétraèdres OXYZ et ORR_1R_2, seront ou ne seront pas de même sens, suivant que les triangles sphériques XYZ et RR_1R_2, vus du point O, seront ou ne seront pas de même sens. Dans le premier cas, $\sin xyz = \sin xy \sin \widehat{xy, z}$ et $\sin rr_1r_2 = \sin rr_1 \sin \widehat{rr_1, r_2}$ seront de même signe, parce que, dans des angles solides de même sens, $\sin \widehat{xy, z}$ et $\sin \widehat{rr_1, r_2}$ doivent être de même signe ou de signe contraire, selon que $\sin xy$ et $\sin rr_1$, seront de même signe ou de signe contraire. Dans le second cas, ces mêmes quantités sont de signe contraire.

4. Soient O l'origine d'axes coordonnés quelconques; (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points A, B, C, et désignons les distances OA, OB, OC par r, r_1, r_2. Enfin prenons le volume du tétraèdre OABC positivement ou négativement, selon que $\sin rr_1r_2$ sera pris positivement ou négativement. On aura

$$6\,\text{OABC} = rr_1r_2 \sin rr_1r_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz \quad (*).$$

Démonstration. — On a (2)

$$r^2 r_1^2 r_2^2 \sin^2 rr_1r_2 = r^2 r_1^2 r^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos rr_1 & \cos rr_2 \\ \cos rr_1 & 1 & \cos r_1r_2 \\ \cos rr_2 & \cos r_1r_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} rr & rr_1 \cos r\,r_1 & r\,r_2 \cos r\,r_2 \\ rr_1 \cos rr_1 & r_1r_1 & r_1r_2 \cos r_1r_2 \\ rr_2 \cos rr_2 & r_1r_2 \cos r_1r_2 & r_2r_2 \end{vmatrix}.$$

(*) LAGRANGE, *Sur les Pyram.*, 14 (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773, p. 149). — MONGE, *loc. cit.* — MOEBIUS, *Statique*, § 63.

Or on a, par la projection orthogonale,

$$\begin{aligned}
r\cos xr &= x + y\cos xy + z\cos xz = \mathrm{X},\\
r\cos yr &= x\cos xy + y + z\cos yz = \mathrm{Y},\\
r\cos zr &= x\cos xz + y\cos yz + z = \mathrm{Z},\\
r &= x\cos xr + y\cos yr + z\cos zr,\\
r_1\cos rr_1 &= x_1\cos xr + y_1\cos yr + z_1\cos zr,
\end{aligned}$$

etc. Si l'on désigne par X_1, Y_1, Z_1 les quantités analogues relatives à x_1, y_1, z_1; par X_2, Y_2, Z_2 les quantités analogues relatives à x_2, y_2, z_2, on a

$$\begin{aligned}
rr &= x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z},\\
rr_1\cos rr_1 &= x_1\mathrm{X} + y_1\mathrm{Y} + z_1\mathrm{Z}\\
&= x\mathrm{X}_1 + y\mathrm{Y}_1 + z\mathrm{Z}_1,
\end{aligned}$$

etc. Par conséquent, en appliquant le théorème du § VI, 1, on a, au lieu du déterminant ci-dessus, le produit

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \mathrm{X}_1 & \mathrm{Y}_1 & \mathrm{Z}_1 \\ \mathrm{X}_2 & \mathrm{Y}_2 & \mathrm{Z}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}.$$

Donc, en désignant ± 1 par ε,

$$rr_1r_2\sin rr_1r_2 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz.$$

Si, parmi les coordonnées des points considérés, x, y_1, z_2 sont seules différentes de zéro, toutes les autres étant nulles, alors r coïncide avec x, r_1 avec y, r_2 avec z, et le déterminant se réduit à son terme initial (§ II, 7). Par conséquent $\varepsilon = 1$.

Remarque. — Au moyen des théorèmes (1) et (4), on peut interpréter géométriquement les plus simples des identités établies au § III, 11.

5. Soient donnés les points A, B, C par leurs coordonnées (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), rapportées à deux axes tracés dans le plan ABC. On a

$$2\,\mathrm{ABC} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin xy \ (^*).$$

Démonstration. — Par rapport à un système d'axes mené par l'origine A parallèlement aux axes donnés, les coordonnées des points B et C seront $(x_1 - x, y_1 - y)$, $(x_2 - x, y_2 - y)$; on a par suite (1)

$$2\,\mathrm{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 - x, & y_1 - y \\ x_2 - x, & y_2 - y \end{vmatrix} \sin xy.$$

En appliquant ce qu'on a vu (§ II, 5 et § III, 4), on trouve, au lieu de ce déterminant,

$$\begin{vmatrix} 1, & x - x, & y - y \\ 1, & x_1 - x, & y_1 - y \\ 1, & x_2 - x, & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Remarque. — Toutes les fois que dans la formule ABC on permute deux lettres, la surface du triangle change de signe. Effectivement, le déterminant des coordonnées éprouve un changement de signe par la permutation de deux lignes horizontales (§ II, 4). Par le développement de ce déterminant, on obtient l'identité connue

$$\mathrm{ABC} = \mathrm{OBC} + \mathrm{OCA} + \mathrm{OAB}.$$

Pour exprimer la condition que A soit situé sur la droite BC, c'est-à-dire pour l'équation de la droite passant par B

(*) Cette formule connue a été donnée sous cette forme par Cayley, *Cambrige Math. Journ.*, t. II, p. 268, et par Joachimsthal, *Journal de Crelle*, t. XL, p. 23.

et C, on trouve, à cause de ABC = o dans ce cas,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Si les points A, B, C, D sont donnés par leurs coordonnées relatives à trois axes (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), on a

$$6\,\mathrm{ABCD} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \sin xyz \ (*).$$

Démonstration. — Si l'on mène par A un système d'axes parallèles aux axes donnés et de même direction, les coordonnées des points B, C, D par rapport à ces axes seront $(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$, $(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$, etc.; par conséquent on a (4)

$$6\,\mathrm{ABCD} = \begin{vmatrix} x_1 - x, & y_1 - y, & z_1 - z \\ x_2 - x, & y_2 - y, & z_2 - z \\ x_3 - x, & y_3 - y, & z_3 - z \end{vmatrix} \sin xyz.$$

En appliquant ce qui a été vu (§ II, 5 et § III, 4), on trouve, pour la valeur du déterminant multiplié par sin xyz,

$$\begin{vmatrix} 1, & x - x, & y - y, & z - z \\ 1, & x_1 - x, & y_1 - y, & z_1 - z \\ 1, & x_2 - x, & y_2 - y, & z_2 - z \\ 1, & x_3 - x, & y_3 - y, & z_3 - z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Remarque. — Lorsque dans la formule ABCD on permute deux lettres, le volume du tétraèdre change à chaque

(*) CAYLEY, *loc. cit.* — JOACHIMSTHAL, *loc. cit.*

fois de signe, ainsi que le déterminant qui entre dans son expression.

La condition pour que A se trouve dans le plan BCD, et par suite l'équation du plan BCD, est ABCD = o, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

dont on aperçoit immédiatement la signification géométrique.

7. La position du point P par rapport au tétraèdre OABC est déterminée par les rapports des tétraèdres

$$OBCP : OCAP : OABP : OABC = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : 1 \ (*).$$

Soient, en effet, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x, y, x) les coordonnées de A, B, C, P par rapport à trois axes passant par O. On a (4)

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mu_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \mu_1 V,$$

et ainsi de suite.

En développant ces équations, et désignant par ξ_1, η_1, $\zeta_1, \ldots$ les coefficients de x_1, y_1, $z_1, \ldots$ dans le détermi-

(*) LAGRANGE, *Sur les Pyram.*, 28.

nant V, il vient

$$(\text{I})\qquad \begin{aligned} \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z &= \mu_1 \mathrm{V},\\ \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z &= \mu_2 \mathrm{V},\\ \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z &= \mu_3 \mathrm{V}. \end{aligned}$$

Or on a (§ III, 1)

$$\begin{aligned} x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 &= \mathrm{V},\\ x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 &= 0, \end{aligned}$$

etc. Par conséquent

$$(\text{II})\qquad \begin{aligned} x &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3,\\ y &= \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3,\\ z &= \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3. \end{aligned}$$

Pour déterminer le rapport $\mathrm{PABC} : \mathrm{OABC} = \mu$, développons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z\\ 1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x & y & z \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire (6 et 4),

$$(\text{III})\qquad \begin{aligned} \mathrm{PABC} &= \mathrm{OABC} - \mathrm{OBCP} - \mathrm{OCAP} - \mathrm{OABP},\\ \mu &= 1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3\ . \end{aligned}$$

De là résulte, a, b, c, d étant des quantités quelconques,

$$\begin{aligned} a + bx + cy + dz = \mu a &+ \mu_1 (a + bx_1 + cy_1 + dz_1)\\ &+ \mu_2 (a + bx_2 + cy_2 + dz_2)\\ &+ \mu_3 (a + bx_3 + cy_3 + dz_3). \end{aligned}$$

Pour trouver la signification géométrique de cette équation, concevons le plan qui a pour équation

$$a + bx' + cy' + dz' = 0.$$

Si ce plan est rencontré par des parallèles aux z, menées par P, O, A, B, C, aux points P′, O′ A′, B′, C′, et que P′ ait pour coordonnées x, y, z', on aura

$$a + bx + cy + dz' = 0,$$
$$a + bx + cy + dz = d(z - z') = d \,.\, P'P,$$

etc. On a par conséquent l'équation

$$\text{(IV)} \quad P'P = \mu \,.\, O'O + \mu_1 \,.\, A'A + \mu_2 \,.\, B'B + \mu_3 \,.\, C'C\,(*),$$

où l'on peut entendre par P′, O′, A′, B′, C′, les intersections d'un faisceau quelconque de parallèles, menées par P, O, A, B, C, avec un plan quelconque. Par suite on voit que P est le centre de gravité des masses μ, μ_1, μ_2, μ_3, placés en O, A, B, C, et dont la somme est égale à l'unité.

8. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux de OA, OB, OC; le tétraèdre OABC sera partagé en deux parties équivalentes par chacun des plans A_1BC, AB_1C, ABC_1, et le centre de gravité P du tétraèdre OABC se trouvera sur chacun de ces plans médians, de telle sorte qu'on aura

$$A_1BCP = 0, \quad AB_1CP = 0, \quad ABC_1P = 0.$$

A_1 ayant pour coordonnées $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{2}y_1$, $\frac{1}{2}z_1$, on a (6), d'après les notations précédentes,

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{2}y_1 & \frac{1}{2}z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

(*) FEUERBACH, *Untersuchung der dreieckigen Pyramide*, p. 5. — MOEBIUS, *Baryc. Calc.*, cap. 1. Les quantités μ, μ_1, μ_2, μ_3 sont les coordonnées barycentriques (coefficients coordonnés) du point P par rapport à la pyramide fondamentale OABC, selon Mœbius et Feuerbach.

etc. Par conséquent

$$2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1,$$
$$\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 = 1,$$
$$\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 = 1,$$

d'où l'on tire

$$\mu_1 - \mu_2 = 0, \quad \mu_1 - \mu_3 = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{4}.$$

Donc $\mu = \frac{1}{4}$, et l'on a

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4},$$

c'est-à-dire que le centre de gravité d'un tétraèdre est le sommet commun de quatre tétraèdres équivalents, ayant pour bases les faces du tétraèdre, et aussi le centre de gravité de quatre masses égales, ayant leurs centres de gravité respectifs aux sommets du tétraèdre (*).

9. Étant données les équations des côtés d'un triangle par rapport à un système de deux axes, on trouve la surface du triangle de la manière suivante (**). Soient

$$a : b : c, \quad a_1 : b_1 : c_1, \quad a_2 : b_2 : c_2$$

les coordonnées des côtés, c'est-à-dire, supposons que, pour chaque point du premier côté, ayant pour coordonnées p, q, on ait $a + bp + cq = 0$, et de même pour les autres. Les coordonnées des sommets (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), avec les trois quantités auxiliaires p, p_1, p_2, sont déterminées par les équations

$$a + b\,x + c\,y = p, \quad a + b\,x_1 + c\,y_1 = 0, \quad a + b\,x_2 + c\,y_2 = 0,$$
$$a_1 + b_1 x + c_1 y = 0, \quad a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = p_1, \quad a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0,$$
$$a_2 + b_2 x + c_2 y = 0, \quad a_2 + b_2 x_1 + c_2 y_1 = 0, \quad a_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2 = p_2,$$

(*) LAGRANGE, *Sur les Pyr.*, 31-35.
(**) JOACHIMSTHAL, *Journal de Crelle*, t. XL, p. 23

lesquelles expriment que le point (x, y) est situé sur la deuxième et sur la troisième droite, mais non sur la première, etc. On a, par le § VI, 1,

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Des trois premières équations, il résulte (§ IX, 3; § III, 3)

$$\begin{vmatrix} a-p & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & b & c \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$R - p\alpha = 0,$$

en désignant par R le déterminant des coefficients des droites, et par α le coefficient de a dans ce déterminant. On a d'une manière analogue

$$R - p_1\alpha_1 = 0, \quad R - p_2\alpha_2 = 0.$$

Par suite, il vient (§ II, 7)

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = pp_1p_2 = \frac{R^3}{\alpha\alpha_1\alpha_2}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{\alpha\alpha_1\alpha_2},$$

et par conséquent le double de la surface cherchée du triangle a pour valeur

$$\frac{R^2 \sin xy}{\alpha\alpha_1\alpha_2}.$$

Après avoir calculé, par les formules connues, les hauteurs du triangle, c'est-à-dire les distances des points (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) à la première, à la deuxième, à la troisième droite respectivement, on obtient les côtés du triangle en divisant par ces hauteurs le double de la surface que l'on vient de trouver.

Si le déterminant des coordonnées linéaires s'annule sans que deux lignes horizontales soient composées des mêmes éléments, alors les trois droites passent par un même point situé à une distance finie.

10. Étant données les équations des faces d'un tétraèdre par rapport à un système de trois axes, on trouvera le volume du tétraèdre de la même manière qu'on a trouvé la surface du triangle au moyen des côtés (*). Soient

$$a : b : c : d, \quad a_1 : b_1 : c_1 : d_1, \quad a_2 : b_2 : c_2 : d_2, \quad a_3 : b_3 : c_3 : d_3,$$

les coordonnées des faces, c'est-à-dire supposons que pour un point quelconque de la première face ayant pour coordonnées p, q, r, on ait $a + bp + cq + dr = 0$, etc. On déterminera les coordonnées des sommets (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), avec les quantités auxiliaires p, p_1, p_2, p_3, par les quatre systèmes, de quatre équations chacun,

$$\begin{aligned} a + bx + cy + dz &= p, \\ a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z &= 0, \\ a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z &= 0, \\ a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z &= 0, \end{aligned}$$

etc., lesquelles expriment que le point (x, y, z) est situé sur le deuxième, le troisième et le quatrième plan, et non sur le premier, etc. On a (§ VI, 1)

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(*) JOACHIMSTHAL, *loc. cit.*

Du premier système de quatre équations on tire

$$\begin{vmatrix} a-p & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \quad R - p\alpha = 0,$$

R étant le déterminant des coordonnées superficielles, et α le coefficient qui multiplie a dans R. On a semblablement

$$R - p_1\alpha_1 = 0, \quad R - p_2\alpha_2 = 0, \quad R - p_3\alpha_3 = 0,$$

et par conséquent

$$pp_1p_2p_3 = \frac{R^4}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{R^3}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3},$$

et le sextuple du volume cherché du tétraèdre (6) aura pour valeur

$$\frac{R^3 \sin xyz}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}.$$

De là on peut, au moyen des hauteurs du tétraèdre, déduire les aires de ses faces.

Si le déterminant des coordonnées superficielles est nul, sans que deux lignes horizontales de ses éléments soient identiques, les quatre plans passeront par un même point situé à une distance finie.

§ XVII. — *Sur les produits de surfaces de triangles et de volumes de tétraèdres.*

1. Soient x, y, r, r_1 des directions quelconques dans un plan, et supposons que les angles positifs entre ces directions soient décrits par des rotations de même sens. On

aura

$$\sin xy \sin rr_1 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix}.$$

Démonstration. — On peut, sans altérer les angles, faire partir les directions données d'un même point O. Prenons sur les directions r, r_1 les segments positifs $OA = r$, $OB = r_1$, et soient (x, y), (x_1, y_1) les coordonnées des points A, B par rapport aux axes x, y. On aura (§ XVI, 1)

$$\begin{aligned} rr_1 \sin xy \sin rr_1 &= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x + y \cos xy, & x \cos xy + y \\ x_1 + y_1 \cos xy, & x_1 \cos xy + y_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} r \cos xr, & r \cos yr \\ r_1 \cos xr_1, & r_1 \cos yr_1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

d'où résulte (§ III, 2) la proposition énoncée.

2. Les triangles AA_1A_2 et BB_1B_2 étant situés dans un même plan, si l'on pose

$$AA_i . BB_k . \cos\left(\widehat{AA_i, BB_k}\right) = c_{i,k},$$

on aura

$$4\, AA_1A_2 . BB_1B_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. — Posons $AA_1 = x$, $AA_2 = y$, $BB_1 = r$, $BB_2 = r_1$; il viendra (1)

$$\begin{aligned} 4\, AA_1A_2 . BB_1B_2 &= xyrr_1 \sin xy \sin rr_1 \\ &= \begin{vmatrix} xr \cos xr, & yr \cos yr \\ xr_1 \cos xr_1, & yr_1 \cos yr_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Le produit $c_{i,k}$ n'est pas ambigu, comme il pourrait le paraître. Déterminons arbitrairement les directions positives des droites AA_i et BB_k, c'est-à-dire les directions sui-

vant lesquelles les distances doivent être comptées positivement sur ces droites. Par là les facteurs $\cos(\widehat{AA_i, BB_k})$, AA_i, BB_k prennent des signes déterminés. Si l'on avait pris la direction positive d'une droite, par exemple, de AA_i, dans le sens opposé, l'angle $(\widehat{AA_i, BB_k})$ aurait varié de 180°, et par suite $\cos(\widehat{AA_i, BB_k})$ aurait changé de signe, en même temps que la distance AA_i.

3. Si les plans des triangles AA_1A_2, BB_1B_2 font entre eux l'angle φ, on a, d'après la notation précédente,

$$4\,AA_1A_2 . BB_1B_2 . \cos\varphi = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. — Soit NN_1N_2 la projection orthogonale de BB_1B_2 sur le plan AA_1A_2; on peut appliquer au produit $4\,AA_1A_2 . NN_1N_2$ le théorème précédent. On a alors, d'une part,

$$NN_1N_2 = BB_1B_2 \cos\varphi,$$

et d'autre part

$$AA_1 . NN_1 . \cos(\widehat{AA_1, NN_1}) = AA_1 . BB_1 . \cos(\widehat{AA_1, BB_1}),$$

etc., les projections orthogonales de NN_1 et de BB_1 sur la droite AA_1 étant identiques.

Le produit $4\,AA_1A_2 . BB_1B_2 . \cos\varphi$ n'est pas ambigù, non plus que le déterminant que l'on a trouvé pour sa valeur. Ayant choisi à volonté le sens positif dans chacun des deux plans, c'est-à-dire le sens dans lequel on doit compter positivement les angles et les surfaces, on en tirera les signes des triangles AA_1A_2, BB_1B_2, et alors on entendra par φ l'angle que doit décrire l'un des plans pour que les triangles positifs dans les deux plans se trouvent de même sens. Si l'on change le sens positif dans l'un des plans, deux des

facteurs du produit changent de signe, savoir, le triangle et $\cos\varphi$, l'angle φ variant de 180°; donc le produit ne change pas.

4. En désignant par x, y, r, r_1 des directions quelconques de l'espace, on a

$$\sin xy \sin rr_1 \cos\left(\widehat{xy, rr_1}\right) = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix} \ (*).$$

Démonstration. — Faisons passer les directions données par un même point O, et prenons sur ces directions les distances positives $OC = x$, $OD = y$, $OE = r$, $OF = r_1$; on aura

$$xyrr_1 \sin xy \sin rr_1 \cos\left(\widehat{xy, rr_1}\right) = \begin{vmatrix} xr \cos xr, & yr \cos yr \\ xr_1 \cos xr_1, & yr_1 \cos yr_1 \end{vmatrix},$$

d'où, en supprimant le facteur commun $xyrr_1$, on tire la proposition énoncée.

Remarque. — Pour démontrer la vérité de cette même proposition relativement à quatre plans quelconques (**), il suffit d'appliquer la proposition aux normales positives de ces plans, ou, ce qui revient au même, à la figure polaire du quadrilatère CDEF considéré ci-dessus, en supposant les points C, D, E, F situés sur une sphère décrite du centre O. Cette sphère sera rencontrée en un point par l'intersection de deux plans prise dans une direction choisie arbitrairement, et sera rencontrée par chaque plan suivant un grand cercle d'un sens déterminé arbitrairement, sans

---

(*) Cette proposition, qui comprend les propositions précédentes trouvées par Von Staudt, a été établie pour la première fois par Gauss (*Disq. gen. circa superf. curvas*, II, 6); puis elle a été reproduite par Von Staudt, *Journal de Crelle*, t. XXIV, p. 252, et en dernier lieu par Cauchy, *Exercices d'Analyse*, t. IV, p. 41.

(**) JOACHIMSTHAL, *loc, cit.*, p. 44, a donné une démonstration analytique de ce corollaire relatif à la figure polaire.

que le produit dont la valeur est donnée par le déterminant présente une ambiguïté de signe.

5. Des équations

$$\sin rs \sin tu \cos\left(\widehat{rs, tu}\right) = \cos rt \cos su - \cos st \cos ru,$$
$$\sin st \sin ru \cos\left(\widehat{st, ru}\right) = \cos sr \cos tu - \cos tr \cos su,$$
$$\sin tr \sin su \cos\left(\widehat{tr, su}\right) = \cos ts \cos ru - \cos rs \cos tu,$$

on tire par addition

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin rs \sin tu \cos\left(\widehat{rs, tu}\right) + \sin st \sin ru \cos\left(\widehat{st, ru}\right) \\ \qquad + \sin tr \sin su \cos\left(\widehat{tr, su}\right) = 0, \end{array} \right.$$

à cause de $\cos tr = \cos rt$, etc. Dans ces équations, il faut observer que $\sin rs = -\sin sr$, $\cos\left(\widehat{rs, tu}\right) = -\cos(sr, tu)$, etc.

L'équation correspondante (*) entre les angles de quatre plans et les intersections opposées de ces plans sera

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin rs \sin tu \cos \gamma\gamma_1 + \sin st \sin ru \cos \alpha\alpha_1 \\ \qquad + \sin tr \sin su \cos \beta\beta_1 = 0, \end{array} \right.$$

en désignant les intersections rs, st, tr par γ, α, β, et les intersections tu, ru, su par γ_1, α_1, β_1.

On a de même, pour quatre points A, B, C, D,

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{l} AB.CD.\cos \gamma\gamma_1 + BC.AD.\cos \alpha\alpha_1 \\ \qquad + CA.BD.\cos \beta\beta_1 = 0, \end{array} \right. \quad (^{**}),$$

AB, BC, CA, désignant des segments pris sur les droites γ, α, β, et CD, AD, BD des segments pris sur les droites γ_1, α_1, β_1. On a, en effet,

$$AB \cos \gamma\gamma_1 = AD \cos \alpha_1\gamma_1 + DB \cos \beta_1\gamma_1,$$
$$BC \cos \alpha\alpha_1 = BD \cos \beta_1\alpha_1 + DC \cos \gamma_1\alpha_1,$$
$$CA \cos \beta\beta_1 = CD \cos \gamma_1\beta_1 + DA \cos \alpha_1\beta_1.$$

(*) JOACHIMSTHAL, *loc. cit.*

(**) CARNOT, *Mémoire sur la relation qui existe, etc.*, 27.

En multipliant ces équations respectivement par CD, AD, BD, et faisant la somme, on obtient la relation énoncée, puisque l'on a AD = — DA, et $\cos \beta_1 \alpha_1 = \cos \alpha_1 \beta_1$, etc.

Les équations (II) et (III) ne diffèrent pas essentiellement entre elles, comme l'a remarqué Joachimsthal (*l. c.*). On a, en effet, en ayant même égard au signe,

$$\mathrm{ABCD} = \frac{2}{3}\,\mathrm{ABC.ABD}\cdot\frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{ABC},\,\mathrm{ABD}}\right)}{\mathrm{AB}},$$

puisque $\frac{2\,\mathrm{ABD}}{\mathrm{AB}}$ désigne la hauteur du triangle ABD par rapport à la base AB, et par conséquent $\frac{2\,\mathrm{ABD}}{\mathrm{AB}}\cdot\sin\left(\widehat{\mathrm{ABC},\,\mathrm{ABD}}\right)$ la hauteur de la pyramide ABCD par rapport à la base ABC, si l'on suppose que, pour un observateur dont la direction de haut en bas serait AB, l'angle $\left(\widehat{\mathrm{ABC},\,\mathrm{ABD}}\right)$ et l'angle solide formé par AB, AC, AD soient de même sens. On a de même

$$\mathrm{CDAB} = \frac{2}{3}\,\mathrm{CDA.CDB}\cdot\frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{CDA},\,\mathrm{CDB}}\right)}{\mathrm{CD}};$$

d'où il résulte, en multipliant,

$$\overline{\mathrm{ABCD}}^2 = \frac{4}{9}\,\mathrm{P}\,\frac{\sin rs \sin tu}{\mathrm{AB.CD}},$$

en désignant par r, s, t, u les plans respectivement opposés à A, B, C, D, et par P le produit des surfaces des triangles. Le sens positif de chaque plan est ici déterminé de telle manière, que le triangle situé sur ce plan soit positif; les angles dièdres positifs sont décrits tous par des rotations de même sens. Une permutation circulaire de A, B, C, ne fait subir à P aucune altération; on a donc encore

$$\overline{\mathrm{ABCD}}^2 = \frac{4}{9}\,\mathrm{P}\,\frac{\sin st \sin ru}{\mathrm{BC.AD}} = \frac{4}{9}\,\mathrm{P}\,\frac{\sin tr \sin su}{\mathrm{CA.BD}},$$

d'où

$$(\text{IV})\quad \frac{9\,\overline{\text{ABCD}}^2}{4\text{P}} = \frac{\sin rs \sin tu}{\text{AB.CD}} = \frac{\sin st \sin ru}{\text{BC.AD}} = \frac{\sin tr \sin su}{\text{CA.BD}}\ (^*).$$

On voit par là comment les équations (II) et (III) peuvent se déduire l'une de l'autre.

6. Si x, y, z, r, r_1, r_2, sont des directions quelconques dans l'espace, on a

$$\sin xyz \sin rr_1 r_2 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix}\ (^{**}).$$

Démonstration. — Faisons passer les directions données par un même point O, et prenons sur ces directions les segments positifs $\text{OA} = r$, $\text{OB} = r_1$, $\text{OC} = r_2$; soient (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), les coordonnées des points A, B, C par rapport aux axes x, y, z. On a (§ XVI, 4)

$$rr_1 r_2 \sin xyz \sin rr_1 r_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x + y \cos xy + z \cos xz, & x \cos xy + y + z \cos yz, & x \cos xz + y \cos yz + z \\ x_1 + y_1 \cos xy + z_1 \cos xz, & x_1 \cos xy + y_1 + z_1 \cos yz, & x_1 \cos xz + y_1 \cos yz + z_1 \\ x_2 + y_2 \cos xy + z_2 \cos xz, & x_2 \cos xy + y_2 + z_2 \cos yz, & x_2 \cos xz + y_2 \cos yz + z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr & r \cos zr \\ r_1 \cos xr_1 & r_1 \cos yr_1 & r_1 \cos zr_1 \\ r_2 \cos xr_2 & r_2 \cos yr_2 & r_2 \cos zr_2 \end{vmatrix},$$

d'où, en supprimant le facteur commun $rr_1 r_2$, on conclut la proposition énoncée.

(*) BRETSCHNEIDER, *Géométrie*, § 677.

(**) VON STAUDT, *loc. cit.* Le cas particulier où le système x, y, z est orthogonal, et où par suite $\sin xyz = \pm 1$, a été traité déjà par GAUSS, *loc. cit.*

7. En désignant par $c_{i,k}$ le même produit de segments que ci-dessus (2), on a

$$36\, AA_1A_2A_3 . BB_1B_2B_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} \ (^*).$$

Démonstration. — En posant

$$AA_1 = x, \quad AA_2 = y, \quad AA_3 = z,$$
$$BB_1 = r, \quad BB_2 = r_1, \quad BB_3 = r_2,$$

il vient (6)

$$36\, AA_1A_2A_3 . BB_1B_2B_3 = xyzrr_1r_2 \sin xyz \sin rr_1r_2,$$
$$= \begin{vmatrix} xr \cos xr, & yr \cos yr, & zr \cos zr \\ xr_1 \cos xr_1, & yr_1 \cos yr_1, & zr_1 \cos zr_1 \\ xr_2 \cos xr_2, & yr_2 \cos yr_2, & zr_2 \cos zr_2 \end{vmatrix}.$$

8. Les déterminants

$$\begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix}$$

ont, en vertu de leurs valeurs trouvées (1, 4, 6), la propriété remarquable de n'éprouver aucun changement, lorsqu'on fait varier d'une manière quelconque la position relative des angles xy, rr_1 d'une part, et des angles solides xyz, rr_1r_2 de l'autre, pourvu que, dans le premier cas, l'angle dièdre $(\widehat{xy, rr_1})$ conserve sa grandeur (**).

9. Au moyen de l'équation (6), on peut calculer la distance de deux droites dans l'espace, données de position par

(*) Von Staudt, *loc. cit.* Dans le cas où le second tétraèdre n'est pas différent du premier, alors on a $c_{i,k} = c_{k,i}$, et l'on obtient la formule de Lagrange (*Sur les pyr.*, 15), et de Legendre (*Éléments de Géométrie*, Note V, 7).

(**) Cauchy, *Exercices d'Analyse*, t. IV, p. 51.

rapport à un système d'axes quelconque x, y, z. Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points A et B; soient données les directions r_1, r_2 des droites AA′, BB′ au moyen de leurs angles avec les axes, de sorte que l'on puisse calculer l'angle $r_1 r_2$. Désignons par r la distance AB, dont les projections sont $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, et par d la distance cherchée des droites AA′, BB′. Tirons enfin AC dans la direction r_2, et prenons AA′, AC égales à l'unité de longueur. On a

$$6\,\mathrm{AA'CB} = d \sin r_1 r_2 = r \sin r r_1 r_2,$$

et par suite

$$d \sin xyz \sin r_1 r_2 = \begin{vmatrix} r\cos xr & r\cos yr & r\cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix},$$

en remarquant que

$$\begin{aligned} r\cos xr &= (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\cos xy + (z_2 - z_1)\cos xz, \\ r\cos yr &= (x_2 - x_1)\cos xy + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)\cos yz, \\ r\cos zr &= (x_2 - x_1)\cos xz + (y_2 - y_1)\cos yz + (z_2 - z_1). \end{aligned}$$

On obtient, en développant (*),

$$\begin{aligned} d \sin xyz \sin r_1 r_2 = {} & (\alpha + \beta\cos xy + \gamma\cos xz)(x_2 - x_1) \\ & + (\alpha\cos xy + \beta + \gamma\cos yz)(y_2 - y_1) \\ & + (\alpha\cos xz + \beta\cos yz + \gamma)(z_2 - z_1), \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\alpha = \begin{vmatrix} \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} \cos zr_1 & \cos xr_1 \\ \cos zr_2 & \cos xr_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} \cos xr_1 & \cos yr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 \end{vmatrix}$$

(*) CAUCHY, *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal*, Préliminaires (102).

10. Pour trois directions a, b, c d'un même plan, on a

$$(\sin ab + \sin bc + \sin ca)^2 = 8 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{ab}{2} & \sin^2\frac{ac}{2} \\ \sin^2\frac{ab}{2} & 0 & \sin^2\frac{bc}{2} \\ \sin^2\frac{ac}{2} & \sin^2\frac{bc}{2} & 0 \end{vmatrix},$$

et pour quatre directions de l'espace (ou pour quatre plans) a, b, c, d, on a

$$\begin{pmatrix} \sin abd \\ +\sin bcd \\ +\sin cad \\ -\sin abc \end{pmatrix}^2 = -16 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{ab}{2} & \sin^2\frac{ac}{2} & \sin^2\frac{ad}{2} \\ \sin^2\frac{ab}{2} & 0 & \sin^2\frac{bc}{2} & \sin^2\frac{bd}{2} \\ \sin^2\frac{ac}{2} & \sin^2\frac{bc}{2} & 0 & \sin^2\frac{cd}{2} \\ \sin^2\frac{ad}{2} & \sin^2\frac{bd}{2} & \sin^2\frac{cd}{2} & 0 \end{vmatrix},$$

ces déterminants pouvant être développés d'après le § V, 2 (*).

Démonstration. — En prenant les axes auxiliaires x, y, tels que $\sin xy = 1$, on a (1)

$$\sin bc = \begin{vmatrix} \cos xb & \cos yb \\ \cos xc & \cos yc \end{vmatrix}, \text{ etc.}\ldots,$$

(*) Le théorème de trigonométrie plane se trouve dans les Traités élémentaires. La proposition polyédrométrique correspondante a été énoncée et démontrée par Joachimsthal (*loc. cit.*, 47), avec des inexactitudes dans les signes.

et par suite (§ III, 1)

$$\sin ab + \sin bc + \sin ca = \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix},$$

$$-(\sin ab + \sin bc + \sin ca)^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & \cos xa & \cos ya \\ -1 & \cos xb & \cos yb \\ -1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix},$$

en faisant (§ VI, 4)

$$h_{11} = -1 + \cos^2 xa \qquad + \cos^2 ya = 0,$$
$$h_{12} = -1 + \cos xa \cos xb + \cos ya \cos yb = -1 + \cos ab = -2\sin^2\frac{ab}{2},$$

etc.

En faisant sortir le facteur $(-2)^3$ du déterminant des éléments $h_{11}, \ldots, h_{33}$ (§ III, 2), on obtient l'équation ci-dessus.

En introduisant ensuite les axes x, y, z, pour lesquels $\sin xyz = 1$, on a (6)

$$\sin abc = \begin{vmatrix} \cos xa & \cos ya & \cos za \\ \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ \cos xc & \cos yc & \cos zc \end{vmatrix}, \text{ etc.}\ldots,$$

et par conséquent

$$\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc = \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya & \cos za \\ 1 & \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ 1 & \cos xc & \cos yc & \cos zc \\ 1 & \cos xd & \cos yd & \cos zd \end{vmatrix},$$

d'où, par une méthode analogue à la précédente,

$$-(\sin abd+\sin bcd+\sin cad-\sin abc)^2=\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{vmatrix},$$

en posant

$$h_{11}=-1+\cos^2 xa \quad +\cos^2 ya \quad +\cos^2 za \quad =0,$$

$$h_{12}=-1+\cos xa\cos xb+\cos ya\cos yb+\cos za\cos zb$$

$$=-1+\cos ab=-2\sin^2\frac{ab}{2},$$

etc....

En dégageant de ce déterminant le facteur $(-2)^4$, on obtient l'équation qu'il s'agissait de démontrer.

11. En désignant par a, b, c les directions des rayons OA, OB, OC d'un cercle; par f, g, h les carrés des côtés du triangle inscrit ABC; par r le rayon du cercle; en multipliant par $8r^6$ les deux membres de la première des équations goniométriques établies au nº 10, et remarquant que

$$r^2\sin ab=2\,\text{OAB},\quad 4r^2\sin^2\frac{ab}{2}=h,\ \text{etc}\ldots;$$

on a

$$(4r.\text{ABC})^2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix}=fgh,$$

relation connue.

En désignant par a, b, c, d les directions des rayons OA, OB, OC, OD d'une sphère; par f, g, h les carrés des arêtes BC, CA, AB du tétraèdre inscrit ABCD; par f', g', h' les carrés des arêtes respectivement opposées AD, BD, CD; par r le rayon de la sphère; en multipliant par $16r^8$ les deux membres de la seconde des équations établies au nº 10,

et observant que

$$r^3 \sin abd = 6\,\text{OABD}, \quad 4r^2 \sin^2 \frac{ab}{2} = h, \text{ etc.}\ldots,$$

il vient

$$(24r.\text{ABCD})^2 = -\begin{vmatrix} o & h & g & f' \\ h & o & f & g' \\ g & f & o & h' \\ f & g' & h' & o \end{vmatrix},$$

pour l'expression du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en fonction des arêtes et du volume (*).

12. Le produit, que l'on rencontre souvent, de deux longueurs par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent, peut s'exprimer au moyen des carrés des droites qui joignent les extrémités de ces longueurs, moyennant quoi les produits de polygones et de polyèdres peuvent prendre des formes remarquables.

En prenant les notations du n° 5, III, on a

$$2\,\text{AB}.\text{CD} \cos \gamma\gamma_1 = 2\,\text{AD}.\text{CD} \cos \alpha_1\gamma_1 - 2\,\text{BD}.\text{CD} \cos \beta_1\gamma_1.$$

Or on a généralement

$$2\,\text{AD}.\text{CD} \cos \alpha_1\gamma_1 = \text{AD}^2 + \text{CD}^2 - \text{AC}^2,$$
$$2\,\text{BC}.\text{CD} \cos \beta_1\gamma_1 = \text{BD}^2 + \text{CD}^2 - \text{BC}^2,$$

et par suite

$$2\,\text{AB}.\text{CD} \cos \gamma\gamma_1 = \text{AD}^2 - \text{BD}^2 - (\text{AC}^2 - \text{BC}^2)\ (**).$$

13. En désignant par $d_{i,k}$ le carré de la distance $A_i B_k$, on a, pour deux triangles dont les plans font entre eux

(*) La relation trouvée par Crelle (*Math. Aufsätze*, t. I, p. 117) a été ramenée à cette forme par Joachimsthal, *loc. cit.* (27).

(**) CARNOT, *loc. cit.*

l'angle φ,

$$16\,A_1A_2A_3.B_1B_2B_3.\cos\varphi = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} \ (^*),$$

les premiers indices se rapportant au premier triangle, et les seconds indices au second triangle.

Démonstration. — D'après (3), on a, en vertu des notations adoptées,

$$16\,A_1A_2A_3.B_1B_2B_3.\cos\varphi = \begin{vmatrix} 2c_{22} & 2c_{32} \\ 2c_{23} & 2c_{33} \end{vmatrix}.$$

Or on a (12)

$$2c_{i,k} = d_{1,k} - d_{i,k} - (d_{11} - d_{i,1}).$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} d_{12} - d_{22} - (d_{11} - d_{21}), & d_{12} - d_{32} - (d_{11} - d_{31}) \\ d_{13} - d_{23} - (d_{11} - d_{21}), & d_{13} - d_{33} - (d_{11} - d_{31}) \end{vmatrix}$$

peut (§ II, 6, et § III, 4) se transformer en

$$\begin{vmatrix} , & d_{11} - d_{21} - (d_{11} - d_{21}), & d_{11} - d_{31} - (d_{11} - d_{31}) \\ , & d_{12} - d_{22} - (d_{11} - d_{21}), & d_{12} - d_{32} - (d_{11} - d_{31}) \\ , & d_{13} - d_{23} - (d_{11} - d_{21}), & d_{13} - d_{33} - (d_{11} - d_{31}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & d_{11} - d_{21}, & d_{11} - d_{31} \\ 1, & d_{12} - d_{22}, & d_{12} - d_{32} \\ 1, & d_{13} - d_{23}, & d_{13} - d_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 0, & 1-1, & 1-1 \\ d_{11}, & 1, & d_{11} - d_{21}, & d_{11} - d_{31} \\ d_{12}, & 1, & d_{12} - d_{22}, & d_{12} - d_{32} \\ d_{13}, & 1, & d_{13} - d_{23}, & d_{13} - d_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix}.$$

COROLLAIRE I. — Si les points B_1, B_2, B_3 coïncident res-

(*) La proposition établie pour la première fois par Von Staudt, *loc. cit.*, a été mise sous cette forme, d'après Cayley, par Sylvester (*Philosophical Magazine*, 1852; t. II, p. 335). *Voir* ci-dessous, § XVIII, 9 et 12.

pectivement avec les points A_1, A_2, A_3, on a

$$\cos\varphi = 1, \quad d_{i,k} = d_{k,i}, \quad d_{i,i} = 0,$$

et par suite

$$16(A_1 A_2 A_3)^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix},$$

ce qui coïncide avec l'expression connue de la surface d'un triangle en fonction de ses côtés (§ V, 2).

La condition pour que A_1, A_2, A_3 soient en ligne droite sera

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour une position quelconque d'un point sur la droite qui passe par les deux autres points, il y a un des facteurs du déterminant qui s'évanouit.

Corollaire II. — La surface d'un quadrilatère plan étant

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_3 A_4,$$

on a, pour deux quadrilatères plans, dont les plans font entre eux un angle φ,

$$\begin{aligned} & 16\, A_1 A_2 A_3 A_4 . B_1 B_2 B_3 B_4 . \cos\varphi \\ = {} & 16\, A_1 A_2 A_3 . B_1 B_2 B_3 . \cos\varphi + 16\, A_1 A_2 A_3 . B_1 B_3 B_4 . \cos\varphi \\ & + 16\, A_1 A_3 A_4 . B_1 B_2 B_3 . \cos\varphi + 16\, A_1 A_3 A_4 . B_1 B_3 B_4 . \cos\varphi \end{aligned}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{33} & d_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{13} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix}.$$

Si donc A et B sont les surfaces de deux polygones plans de m et de n côtés, dont les plans font entre eux l'angle φ, $AB\cos\varphi$ sera la somme, prise négativement, de $(m-2)(n-2)$ déterminants du quatrième degré et de la forme ci-dessus. Ce sera donc une fonction rationnelle et entière des carrés des droites qui joignent les sommets de l'un des polygones avec ceux de l'autre (*).

14. En désignant par $d_{i,k}$ le carré de la distance $A_i B_k$, on a, pour deux tétraèdres,

$$288\, A_1 A_2 A_3 A_4 . B_1 B_2 B_3 B_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix},$$

les premiers indices se rapportant au premier tétraèdre, et les seconds indices au second tétraèdre.

Démonstration. — Le produit cherché est, par le n° 7, égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} {}_{2} - d_{22} - (d_{11} - d_{21}), & d_{12} - d_{32} - (d_{11} - d_{31}), & d_{12} - d_{42} - (d_{11} - d_{41}) \\ {}_{13} - d_{23} - (d_{11} - d_{21}), & d_{13} - d_{33} - (d_{11} - d_{31}), & d_{13} - d_{43} - (d_{11} - d_{41}) \\ {}_{14} - d_{24} - (d_{11} - d_{21}), & d_{14} - d_{34} - (d_{11} - d_{31}), & d_{14} - d_{44} - (d_{11} - d_{41}) \end{vmatrix},$$

lequel peut se transformer, de la manière indiquée au n° 13, en

$$\begin{vmatrix} 1, & d_{11} - d_{21}, & d_{11} - d_{31}, & d_{11} - d_{41} \\ 1, & d_{12} - d_{22}, & d_{12} - d_{32}, & d_{12} - d_{42} \\ 1, & d_{13} - d_{23}, & d_{13} - d_{33}, & d_{13} - d_{43} \\ 1, & d_{14} - d_{24}, & d_{14} - d_{34}, & d_{14} - d_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & b_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix}.$$

(*) VON STAUDT, *loc. cit.*

Corollaire I. — Si l'on fait coïncider les points B_1, B_2, B_3, B_4 respectivement avec A_1, A_2, A_3, A_4, on a

$$d_{i,k} = d_{k,i}, \quad d_{i,i} = 0,$$

et par suite

$$288(A_1 A_2 A_3 A_4)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant d'après le § V, 2, on retrouve la formule connue, donnée par Euler (*Nov. Comm. Petrop.*, t. IV, p. 158) pour le calcul du volume du tétraèdre en fonction des arêtes.

La condition pour que les points A_1, A_2, A_3, A_4 soient dans un même plan sera

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix},$$

ce qui s'accorde avec l'équation entre les distances mutuelles de quatre points d'un même plan (Euler, *Acta Petrop.*, 6, I, p. 3.)

Corollaire II. — Un polyèdre étant donné, onpeut, au moyen des droites tirées d'un sommet A_1 vers les autres sommets A_2, A_3, A_4, ..., et des plans qui comprennent ces droites prises convenablement deux à deux, le décomposer en pyramides triangulaires, ayant pour sommet commun A_1, et pour bases des portions de la surface du polyèdre. Rangeons les systèmes de trois points, qui déterminent les bases de ces pyramides, dans un ordre tel, que

toutes les portions de la surface du polyèdre, vues de dehors, soient de même sens. Alors les pyramides qui composent le polyèdre seront de même signe ou de signe contraire, suivant que leurs bases, vues du sommet A_1, seront de même sens ou de sens contraire.

On peut d'après cela considérer le produit de deux polyèdres comme une somme de produits de tétraèdres pris deux à deux, et le mettre sous la forme d'une somme de déterminants du cinquième degré, tels que ceux que nous venons d'indiquer. Le produit de deux polyèdres est par conséquent une fonction rationnelle et entière des carrés des droites qui joignent les sommets de l'un des polyèdres avec ceux de l'autre, comme v. Staudt l'a remarqué.

15. En désignant par

$$OBC = f, \quad OCA = f_1, \quad OAB = f_2$$

les faces d'un angle solide d'un tétraèdre, et par $\sin_{012}$ le sinus de l'angle solide polaire de celui du tétraèdre, tel que les arêtes du premier soient les normales, prolongées extérieurement, aux faces du second, on a

$$(OABC)^2 = \frac{2}{9} f f_1 f_2 \sin_{012} \quad (*).$$

Démonstration. — Désignons OA, OB, OC par r, r_1, r_2, et $rr_1 \cos rr_1$ par $a_{01} = a_{10}$, etc. On a (§ XVI, 4, et § XVII, 7).

$$(6\,OABC)^2 = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

(*) BRETSCHNEIDER, *Géométrie*, 677. Cette équation ne diffère pas essentiellement de celle de Lagrange (*Sur les pyr.*, 17), et est ici démontrée d'une manière semblable à celle que Lagrange a employée.

Soit de plus α_{00} le coefficient de a_{00} dans ce déterminant, etc, ..., on a (§ VII, 1)

$$(6\,\mathrm{OABC})^4 = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Or on a (3)

$$\alpha_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 4f^2,$$

$$\alpha_{01} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{10} \\ a_{22} & a_{20} \end{vmatrix} = 4ff_1 \cos_{01},$$

etc, ...,

en désignant par $\cos_{01}$ le cosinus de l'angle que forment les normales élevées extérieurement aux surfaces OBC et OCA. De là résulte

$$(6\,\mathrm{OABC})^4 = 4^3 f^2 f_1^2 f_2^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos_{01} & \cos_{02} \\ \cos_{01} & 1 & \cos_{12} \\ \cos_{02} & \cos_{12} & 1 \end{vmatrix},$$

d'où s'ensuit, d'après le § XVI, 2, la démonstration de la proposition énoncée.

Remarque.—On déduit de la même manière du § XVII, 7, l'équation

$$(36\,\mathrm{AA_1\,A_2A_3\,.\,BB_1B_2B_3})^2 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{vmatrix},$$

γ_{11} γ_{21}, ..., étant les coefficients de c_{11}, c_{21}, ..., dans le déterminant des éléments $c_{11}, \ldots, c_{33}$, et désignant des produits de surfaces de l'espèce considérée au n° 3.

16. Lagrange (*Sur les pyr.*, 12) a remarqué que, pour la quatrième face ABC du tétraèdre, on a, d'après les notations adoptées au n° 15, l'équation

$$4(\mathrm{ABC})^2 = \alpha_{00} + \alpha_{11} + \alpha_{22} + 2\alpha_{01} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{20},$$

ou bien

$$(ABC)^2 = f^2 + f_1^2 + f_2^2 + 2ff_1\cos_{01} + 2f_1f_2\cos_{12} + 2f_2f\cos_{20}.$$

Cette équation s'obtient de la manière la plus simple, en la considérant comme la corrélative polaire de l'équation tétragonométrique (*voir* § XVI, 4, et § XVIII, 2, corollaire)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos xy + 2yz\cos yz + 2zx\cos zx.$$

A l'aide des formules trouvées pour $(2ABC)^2$ et $(6OABC)^4$, Lagrange (*Sur les pyr.*, 17) a entrepris la résolution du problème qui consiste à déterminer le tétraèdre de volume maximum ou minimum, parmi ceux dont les faces ont les aires données f, f_1, f_2, f_3. A cause de

$$\alpha_{00} = 4f^2, \quad \alpha_{11} = 4f_1^2, \quad \alpha_{22} = 4f_2^2,$$
$$\alpha_{00} + \alpha_{11} + \alpha_{22} + 2\alpha_{01} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{20} = 4f_3^2,$$

la quatrième puissance du sextuple du volume du tétraèdre, savoir (15),

$$u = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

sera une fonction de variables $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{12}$, dont la somme ν a une valeur donnée. Les conditions pour que u obtienne une valeur maximum ou minimum sont, comme on sait,

$$\frac{du}{d\alpha_{01}} + \mu\frac{dv}{d\alpha_{01}} = 0, \quad \frac{du}{d\alpha_{02}} + \mu\frac{dv}{d\alpha_{02}} = 0, \quad \frac{du}{d\alpha_{12}} + \mu\frac{dv}{d\alpha_{12}} = 0,$$

μ désignant une nouvelle variable, qu'il s'agit d'éliminer entre ces équations. Or $\frac{1}{2}\frac{du}{d\alpha_{01}}$ est le coefficient de α_{01} dans u (§ III, 9), et a pour valeur $R a_{01}$ (§ VII, 3), en

posant (15)

$$R = \sqrt{u} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

De plus, on a $\frac{dv}{d\alpha_{01}} = 1$, etc....; par conséquent le tétraèdre cherché doit satisfaire aux conditions $a_{01} = a_{02} = a_{12}$, c'est-à-dire

$$rr_1 \cos rr_1 = rr_2 \cos rr_2 = r_1 r_2 \cos r_1 r_2.$$

En posant la valeur commune de ces produits d'arêtes $= \sqrt{\theta}$, il vient

$$r_1^2 r_2^2 = \theta + \alpha_{00}, \quad r_2^2 r^2 = \theta + \alpha_{11}, \quad r^2 r_1^2 = \theta + \alpha_{22},$$
$$r^4 r_1^4 r_2^4 = (\theta + \alpha_{00})(\theta + \alpha_{11})(\theta + \alpha_{22}),$$

pour le calcul de r, r_1, r_2 au moyen des quantités données et de la quantité θ, qui reste encore à déterminer. Or on a, dans le cas actuel,

$$\alpha_{01} + \alpha_{12} + \alpha_{20} = 3\theta - (r^2 + r_1^2 + r_2^2)\sqrt{\theta}$$

$=$ la quantité constante $-\frac{1}{2}(\alpha_{00} + \alpha_{11} + \alpha_{22} - 4f_3^2)$, que nous désignerons, pour abréger, par $-c$. On tire de là

$$(r^2 + r_1^2 + r_2^2)\sqrt{\theta} = 3\theta + c,$$
$$(r^4 + r_1^4 + r_2^4 + 2r^2 r_1^2 + 2r^2 r_2^2 + 2r_1^2 r_2^2)\theta = 9\theta^2 + 6c\theta + c^2,$$

$$\left[\frac{(\theta + \alpha_{11})(\theta + \alpha_{22})}{\theta + \alpha_{00}} + \frac{(\theta + \alpha_{22})(\theta + \alpha_{00})}{\theta + \alpha_{11}} + \frac{(\theta + \alpha_{00})(\theta + \alpha_{11})}{\theta + \alpha_{22}}\right]\theta$$
$$= 3\theta^2 + 2\theta(c - 4f_3^2) + c^2,$$
$$\theta(\theta + \alpha_{11})^2(\theta + \alpha_{22})^2 + \theta(\theta + \alpha_{22})^2(\theta + \alpha_{00})^2 + \theta(\theta + \alpha_{00})^2(\theta + \alpha_{11})^2$$
$$= [3\theta^2 + 2\theta(c - 4f_3^2) + c^2](\theta + \alpha_{00})(\theta + \alpha_{11})(\theta + \alpha_{22}),$$

équation du quatrième degré pour le calcul de la quantité auxiliaire θ au moyen des quantités données. Cette équation

a toujours une racine réelle positive, puisque le coefficient de θ^4, dans le premier membre, et le terme connu, dans le second membre, sont de même signe.

Il reste encore à désirer une discussion plus approfondie de cette équation, ainsi que l'étude des propriétés géométriques des tétraèdres qui ont un volume maximum pour des valeurs données des aires de leurs faces.

§ XVIII. — *Relations polygonométriques et polyédrométriques.*

1. Soient $AB = a_1$, $BC = a_2, \ldots$, $MN = a_{n-1}$, $NA = a_n$ les côtés d'un polygone donné quelconque, et $\cos_{p,i}$ le cosinus de l'angle que la droite sur laquelle est pris le $i^{ième}$ côté du polygone fait avec une droite donnée quelconque. On a

$$a_1 \cos_{p,1} + a_2 \cos_{p,2} + \ldots + a_n \cos_{p,n} = 0 \; (*).$$

En effet, si l'on désigne par A_1, $B_1, \ldots$ les projections orthogonales de A, B,... sur la droite donnée, on a

$$A_1 B_1 + B_1 C_1 + \ldots + M_1 N_1 + N_1 A_1 = 0,$$

en supposant $A_1 B_1 = - B_1 A_1$, etc. On a

$$A_1 B_1 = AB \cos_{p,1},$$

de quelque manière qu'on ait choisi la direction des segments positifs sur les droites dont AB et $A_1 B_1$ sont des segments, parce que, en changeant une direction en son opposée, il y a deux des quantités AB, $A_1 B_1$, $\cos_{p,1}$ qui changent de signe. En substituant les valeurs de $A_1 B_1$, $B_1 C_1, \ldots$, on obtient l'équation fondamentale de la polygonométrie que nous venons de poser.

(*) Lexell, *Nov. Comm. Petrop.*, 19, p. 187. — L'Huilier, *Polygonométrie*, p. 20. — Carnot, *Géom. de pos.*, 254.

Réciproquement, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent des segments de direction donnée, et $\cos_{p,i}$ le cosinus de l'angle que fait la droite sur laquelle est pris le $i^{ième}$ segment avec une droite quelconque ; si la somme

$$a_1 \cos_{p,1} + a_2 \cos_{p,2} + \ldots + a_n \cos_{p,n}$$

s'évanouit, de quelque manière que l'on choisisse la droite arbitraire; on obtient un polygone fermé lorsque, sans changer la direction des segments, on fait coïncider le commencement du second avec la fin du premier, le commencement du troisième avec la fin du second, etc; car, dans le cas où la fin du dernier segment ne coïnciderait pas avec le commencement du premier, la somme

$$a_1 \cos_{p,1} + a_2 \cos_{p,2} + \ldots + a_n \cos_{p,n}$$

ne serait pas nulle en général, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

2. Si les périmètres des faces d'un polyèdre quelconque sont tels, que toutes les faces, vues de dehors, soient de même sens; si, de plus, après avoir fixé dans chacun des plans le sens des angles et des surfaces positifs, on pose les faces du polyèdre $= \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; si enfin $\cos_{p,i}$ est le cosinus de l'angle que le plan sur lequel est située la face α_i fait avec un plan pris arbitrairement; on a

$$\alpha_1 \cos_{p,1} + \alpha_2 \cos_{p,2} + \ldots + \alpha_n \cos_{p,n} = 0 \ (*).$$

Démonstration. — Considérons, d'après ce qui a été dit dans le corollaire II du § XVII, 14, le polyèdre comme décomposé en tétraèdres : soient ABCD l'un d'eux et $A_1 B_1 C_1 D_1$ sa projection sur le plan arbitraire. On a (§ XVI, 5)

$$A_1 B_1 C_1 + C_1 B_1 D_1 + B_1 A_1 D_1 + A_1 C_1 D_1 = 0,$$

(*) L'Huilier, *Théorèmes de Polyédrométrie*, 1799 (Mémoires présentés à l'Institut, t. I, 1805, p. 264). — Carnot, *loc. cit.*

et par suite

$$\text{ABC}\cos_{p,h} + \text{CBD}\cos_{p,i} + \text{BAD}\cos_{p,k} + \text{ACD}\cos_{p,l} = 0,$$

h, i, k, l étant les indices relatifs aux plans des triangles projetés. Il existera des équations analogues pour les autres tétraèdres qui composent le polyèdre. En faisant la somme de toutes ces équations, on trouve

$$\alpha_1 \cos_{p,1} + \alpha_2 \cos_{p,2} + \ldots + \alpha_n \cos_{p,n} = 0,$$

parce que chacun des triangles qui n'appartiennent pas à la surface du polyèdre appartient aux surfaces de deux tétraèdres, comme positif pour l'un et comme négatif pour l'autre, de telle sorte qu'il disparaît de la somme. Si, par exemple, le polyèdre est la somme des tétraèdres ABCD et ADCE, la surface de ABCD sera formée de

ABC, ACD, CBD, BAD;

et celle de ADCE de

ADC, ACE, CDE, DAE,

et l'on voit que les faces ACD et ADC, situées sur le plan diagonal, sont égales et de signes contraires.

Corollaire. — Si l'on élève sur les faces du polyèdre les perpendiculaires a_1, a_2, ..., a_n, dirigées extérieurement, et proportionnelles aux aires des faces auxquelles elles sont respectivement perpendiculaires, on a aussi, en vertu de l'équation que nous venons de démontrer,

$$a_1 \cos_{p,1} + a_2 \cos_{p,2} + \ldots + a_n \cos_{p,n} = 0,$$

où l'on peut entendre maintenant par $\cos_{p,i}$ le cosinus de l'angle que la droite sur laquelle est comptée la distance a_i fait avec la normale à un plan donné arbitrairement, c'est-à-dire avec une droite quelconque. On obtient par

conséquent (1) un polygone fermé, lorsque, sans changer la direction des segments $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on fait coïncider le commencement du second avec la fin du premier, le commencement du troisième avec la fin du second, etc. Les angles des côtés de ce polygone sont égaux aux angles des faces du polyèdre, de sorte que *à toute relation polygonométrique correspond une relation polyédrométrique*.

3. Si les droites (plans) répondant aux divers indices sont parallèles aux côtés (faces) d'un polygone (polyèdre) quelconque, on aura

$$\begin{vmatrix} \cos_{1,1} & \cos_{1,2} & \ldots & \cos_{1,n} \\ \cos_{2,1} & \cos_{2,2} & \ldots & \cos_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos_{n,1} & \cos_{n,2} & \ldots & \cos_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

en même temps que $\cos_{i,i} = 1$, $\cos_{i,k} = \cos_{k,i}$.

Démonstration. — De l'équation démontrée ci-dessus résulte le système d'équations linéaires

$$\begin{gathered} a_1 \cos_{1,1} + a_2 \cos_{1,2} + \ldots + a_n \cos_{1,n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 \cos_{n,1} + a_2 \cos_{n,2} + \ldots + a_n \cos_{n,n} = 0. \end{gathered}$$

La résultante de ce système linéaire (§ IX, 3) est précisément l'équation qu'il s'agissait de démontrer.

Puisque trois droites x, y, r, parallèles à un même plan, sont aussi parallèles aux côtés d'un certain triangle, on a, comme on sait,

$$(I) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Étant données quatre droites (plans) quelconques x, y, z, r, on peut construire un quadrilatère (tétraèdre), dont

les côtés (faces) soient parallèles aux droites (plans). On a par conséquent

$$(\text{II})\quad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0 \ (^*).$$

Cette équation, que l'on peut développer d'après le § V, 2, fait connaître la liaison qui existe entre les cosinus des angles formés par quatre droites (plans), entre les côtés et les diagonales d'un quadrilatère sphérique, entre les angles dièdres d'un tétraèdre.

Si, en particulier, x, y, z, r désignent les directions des arêtes AB, AC, AD, et du rayon AE de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, en faisant $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $AE = e$, on a

$$1 : \cos xr : \cos yr : \cos zr : = 2e : b : c : d,$$

et par suite (§ III, 2)

$$(\text{III})\quad \begin{vmatrix} 4e^2 & b & c & d \\ b & 1 & \cos xy & \cos xz \\ c & \cos xy & 1 & \cos yz \\ d & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0 \ (^{**}),$$

formule qui sert à calculer le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre en fonction des arêtes d'un angle solide et des angles que ces arêtes font entre elles. Si au contraire E désigne un cinquième point quelconque de l'espace, on

---

(*) CARNOT, *Géom. de pos.*, 350.

(**) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie*, Note V. Cette équation ne diffère pas essentiellement de l'équation donnée par Lagrange (*Sur les pyr.*, 21).

a, d'après les notations précédentes (§ III, 2),

$$(\text{IV}) \quad \begin{vmatrix} e^2 & be\cos xr & ce\cos yr & de\cos zr \\ be\cos xr & b^2 & bc\cos xy & bd\cos xz \\ ce\cos yr & bc\cos xy & c^2 & cd\cos yz \\ de\cos zr & bd\cos xz & cd\cos yz & d^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En exprimant le produit de segments $be\cos xr$ au moyen des carrés des côtés du triangle ABE, et de même pour les autres, on obtient l'équation entre les carrés des distances mutuelles de cinq points de l'espace. Cette équation est du second degré par rapport au carré de chaque distance, ce qui s'accorde avec la construction au moyen de laquelle on trouve une des distances, connaissant les autres (*).

4. Du système d'équations linéaires (1)

$$\begin{aligned} a_1\cos_{p,1} + a_2\cos_{p,2} + \ldots + a_n\cos_{p,n} &= 0, \\ a_1\cos_{2,1} + a_2\cos_{2,2} + \ldots + a_n\cos_{2,n} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_1\cos_{n,1} + a_2\cos_{n,2} + \ldots + a_n\cos_{n,n} &= 0, \end{aligned}$$

résulte l'équation plus générale

$$\begin{vmatrix} \cos_{p,1} & \cos_{p,2} & \ldots & \cos_{p,n} \\ \cos_{2,1} & \cos_{2,2} & \ldots & \cos_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos_{n,1} & \cos_{n,2} & \ldots & \cos_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime la dépendance entre les angles formés par $n+1$ droites (plans) lorsque n de ces droites (plans) sont parallèles aux côtés (faces) d'un polygone (polyèdre) de n côtés (faces).

(*) CARNOT, *Géom. de pos.*, 359. *Mémoire sur la relation qui existe, etc.*, 58. Cette équation ne diffère que par la forme de l'équation donnée par Lagrange (*Sur les pyr.*, 19).

Dans la théorie analytique de la ligne droite, on fait usage principalement des cas particuliers suivants :

$$\begin{vmatrix} \cos rs & \cos xs & \cos ys \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \cos rs & \cos xs & \cos ys & \cos xs \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0\ (*),$$

pour la détermination de l'angle de deux droites au moyen des angles que ces droites forment avec les axes coordonnés.

5. Du système d'équations linéaires employé au n° 3 on peut déduire les rapports des côtés d'un polygone (ou des faces d'un polyèdre). D'après le § IX, 3, en ayant égard au § VII, 5, on trouve

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots = \sqrt{\beta_{1,1}} : \sqrt{\beta_{2,2}} : \sqrt{\beta_{3,3}} : \ldots,$$

$\beta_{i,i}$ étant le coefficient de $\cos_{i,i}$ dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos_{1,1} & \cos_{1,2} \ldots & \cos_{1,n} \\ \cos_{2,1} & \cos_{2,2} \ldots & \cos_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos_{n,1} & \cos_{n,2} \ldots & \cos_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Pour $n = 3$, $\beta_{1,1}$ se réduit à $\sin^2_{2,3}$, $\beta_{2,2}$ à $\sin^2_{1,3}$, $\beta_{3,3}$ à $\sin^2_{1,2}$, ce qui s'accorde avec la proposition connue sur les rapports des côtés d'un triangle.

Si $n > 3$, et que le polygone soit plan, alors $\beta_{1,1}$, $\beta_{2,2}, \ldots$, $\beta_{n,n}$ s'annulent (3), parce que $n - 1$ droites dans un plan forment un polygone de $n - 1$ côtés. Les rapports

(*) MAGNUS, *Anal. Geom. des Raumes*, § IX, (7). — *Voir* un Mémoire de l'auteur, *Journal de Crelle*, t. XLVI, p. 145.

des côtés d'un polygone plan sont donc en général des fonctions indéterminées des angles formés par les côtés.

Si $n = 4$, et que le polygone ne soit pas plan, on a (§ XVI, 2)

$$\beta_{11} = \sin^2_{234}, \quad \beta_{22} = \sin^2_{134}, \quad \beta_{33} = \sin^2_{124}, \quad \beta_{44} = \sin^2_{123}.$$

On a par conséquent, en n'ayant égard qu'à la valeur absolue,

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \sin_{234} : \sin_{134} : \sin_{124} : \sin_{123},$$

d'où l'on déduit la relation tétraédrométrique correspondante, qui donne les rapports des faces d'un tétraèdre (*).

En vertu de la proportion que nous venons de trouver, on a (1)

$$\sqrt{\beta_{1,1}} \cos_{p,1} + \sqrt{\beta_{2,2}} \cos_{p,2} + \ldots + \sqrt{\beta_{n,n}} \cos_{p,n} = 0,$$

les signes de tous les radicaux étant déterminés par le signe d'un quelconque d'entre eux. Dans le cas le plus simple, on a

$$\sin_{23} \cos_{p,1} + \sin_{31} \cos_{p,2} + \sin_{12} \cos_{p,3} = 0,$$

formule connue de goniométrie.

6. La position du point P par rapport au tétraèdre OABC est déterminée avec ambiguïté par les trois distances AP, BP, CP. La détermination devient complète, lorsque l'on connaît en outre la distance OP, dont le carré est lié avec les trois premières distances par une équation du troisième degré (3). Si l'on désigne, d'une part,

$$\begin{array}{llll} AP^2, & BP^2, & CP^2; & \\ OA^2, & OB^2, & OC^2, & OP^2; \\ OA.OP.\cos AOP, & OB.OP.\cos BOP, & OC.OP.\cos COP, & \end{array}$$

(*) BRETSCHNEIDER, *Géométrie*, 677.

respectivement par

$$g_1,\quad g_2,\quad g_3;$$
$$a_{11},\quad a_{22},\quad a_{33},\quad h;$$
$$h_1,\quad h_2,\quad h_3;$$

et d'autre part, les coordonnées des points

A, B, C, P,

par rapport à trois axes menés par le point O, par

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3;\quad x,\ y,\ z:$$

il existe, entre les deux manières de déterminer P, les relations suivantes (*).

On obtient d'abord, par des considérations trigonométriques, les équations

$$\text{(I)}\quad 2h_1 = a_{11} + h - g_1,\quad 2h_2 = a_{22} + h - g_2,\quad 2h_3 = a_{33} + h - g_3,$$

auxquelles il faut joindre, pour la détermination de h, l'équation (3, IV)

$$\text{(II)}\qquad \begin{vmatrix} h & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

en désignant

OA.OB.cos AOB, OA.OC.cos AOC, OB.OC.cos BOC

respectivement par

$$a_{12}\quad,\quad a_{13}\quad,\quad a_{23}.$$

On trouve de plus, par la projection orthogonale (*voir* § XVI, 4),

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} h_1 = xX_1 + yY_1 + zZ_1, \\ h_2 = xX_2 + yY_2 + zZ_2, \\ h_3 = xX_3 + yY_3 + zZ_3, \end{cases}$$

(*) Lagrange, *Sur les pyr.*, 18.

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + y_1 \cos xy + z_1 \cos xz &= X_1, \\ x_1 \cos xy + y_1 \qquad + z_1 \cos yz &= Y_1, \\ x_1 \cos xz + y_1 \cos yz + z_1 \qquad &= Z_1, \end{aligned}$$

et de même pour les autres.

On a réciproquement (§ IX, 1)

$$(\mathrm{IV}) \qquad \left\{ \begin{aligned} Rx &= h_1 (X_1) + h_2 (X_2) + h_3 (X_3), \\ Ry &= h_1 (Y_1) + h_2 (Y_2) + h_3 (Y_3), \\ Rz &= h_1 (Z_1) + h_2 (Z_2) + h_3 (Z_3), \end{aligned} \right.$$

en posant

$$R = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6\,\mathrm{OABC} \sin xyz,$$

et désignant par $(X_1), \ldots$ les coefficients de $X_1, \ldots$ dans R, lesquels peuvent se développer d'après le § VI, 5.

Si, en particulier, P est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre OABC, on a $g_1 = g_2 = g_3 = h$, et par suite $h_1 = \frac{1}{2} a_{11}$, $h_2 = \frac{1}{2} a_{22}$, $h_3 = \frac{1}{2} a_{33}, \ldots$.

7. La position du point P par rapport au tétraèdre OABC est complétement déterminée par ses distances à trois des faces du tétraèdre, en comptant positivement les distances normales dirigées vers l'intérieur, négativement les distances normales dirigées vers l'extérieur (ou *vice versâ*). Désignons, d'une part, les faces OBC, OCA, OAB, CBA par f_1, f_2, f_3, f; les distances du point P à ces faces par p_1, p_2, p_3, p; d'autre part, les coordonnées des points A, B, C, P, par rapport à trois axes passant par O, comme

précédemment : on a, entre ces déterminations de P les relations suivantes (*).

Posons, comme au § XVI, 7,

$$\text{OABC} : \text{OBCP} : \text{OCAP} : \text{OABP} : \text{CBAP} = 1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu,$$
$$6\,\text{OABC} = \text{V} \sin xyz;$$

on en tire

$$1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu = \text{V} \sin xyz : 2f_1p_1 : 2f_2p_2 : 2f_3p_3 : 2fp,$$

$$\mu_1 \text{V} = \frac{2f_1p_1}{\sin xyz}, \ldots,$$

On a, par cette substitution,

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{2f_1p_1}{\sin xyz} = \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z, \\ \dfrac{2f_2p_2}{\sin xyz} = \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z, \\ \dfrac{2f_3p_3}{\sin xyz} = \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z, \end{cases}$$

et réciproquement

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} x \,\text{V} \sin xyz = f_1p_1x_1 + f_2p_2x_2 + f_3p_3x_3, \\ \dfrac{1}{2} y \,\text{V} \sin xyz = f_1p_1y_1 + f_2p_2y_2 + f_3p_3y_3, \\ \dfrac{1}{2} z \,\text{V} \sin xyz = f_1p_1z_1 + f_2p_2z_2 + f_3p_3z_3. \end{cases}$$

En vertu de l'équation $\mu + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, on a

$$\text{(III)} \quad fp + f_1p_1 + f_2p_2 + f_3p_3 = \frac{1}{2} \text{V} \sin xyz.$$

Si, en particulier, P est le centre d'une sphère tangente

(*) LAGRANGE, *loc. cit.*, 24.

aux faces du tétraèdre, les valeurs absolues de p, p_1, p_2, p_3 sont égales entre elles, tandis que les signes de ces quantités diffèrent suivant que les diverses faces sont touchées intérieurement ou extérieurement. En désignant par ρ le rayon de la sphère inscrite proprement dite, on a

$$\begin{aligned}
(f+f_1+f_2+f_3)\rho &= \frac{1}{2}\mathrm{V}\sin xyz,\\
(f+f_1+f_2+f_3)x &= f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3,\\
(f+f_1+f_2+f_3)y &= f_1y_1+f_2y_2+f_3y_3,\\
(f+f_1+f_2+f_3)z &= f_1z_1+f_2z_2+f_3z_3.
\end{aligned}$$

Si ρ' est le rayon de la sphère qui touche extérieurement la face f, et intérieurement les autres faces, on a $p=-\rho'$, $p_1=p_2=p_3=\rho'$, etc. En faisant toutes les combinaisons de signes possibles, on trouve onze rayons, dont six sont égaux deux à deux, et huit centres.

8. Les relations qui existent (*) entre les coordonnées g_1, g_2, g_3, ou h_1, h_2, h_3 (6) du point P, et les coordonnées μ_1, μ_2, μ_3, ou p_1, p_2, p_3 (7) du même point, s'obtiennent par la substitution des valeurs de x, y, z, trouvées au § XVI, 7, dans les expressions que l'on vient de trouver pour h_1, h_2, h_3. Dans la formule

$$\begin{aligned}
h_1 = \mu_1(x_1\mathrm{X}_1+y_1\mathrm{Y}_1+z_1\mathrm{Z}_1)+\mu_2(x_2\mathrm{X}_1+y_2\mathrm{Y}_1+z_2\mathrm{Z}_1)\\
+\mu_3(x_3\mathrm{X}_1+y_3\mathrm{Y}_1+z_3\mathrm{Z}_1),
\end{aligned}$$

le coefficient de μ_1 a pour valeur $\mathrm{OA}^2=a_{11}$, le coefficient de μ_2 pour valeur $\mathrm{OA}.\mathrm{OB}.\cos \mathrm{AOB}=a_{12}$, etc. (*Démonstration*, § XVI, 4). On a, d'après cela,

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned}
h_1 &= \mu_1a_{11}+\mu_2a_{12}+\mu_3a_{13},\\
h_2 &= \mu_1a_{12}+\mu_2a_{22}+\mu_3a_{23},\\
h_3 &= \mu_1a_{13}+\mu_2a_{23}+\mu_3a_{33}.
\end{aligned}\right.$$

(*) LAGRANGE, *loc. cit.*, 26.

Au lieu de développer le déterminant que l'on doit égaler à zéro pour calculer h (6), on peut poser immédiatement, comme ci-dessus,

$$h = x\text{X} + y\text{Y} + z\text{Z},$$

et il vient

$$(\text{II})\left\{\begin{aligned} h &= \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \mu_3 h_3 \\ &= \mu_1^2 a_{11} + \mu_2^2 a_{22} + \mu_3^2 a_{33} + 2\mu_1\mu_2 a_{12} + 2\mu_1\mu_3 a_{13} + 2\mu_2\mu_3 a_{23}. \end{aligned}\right.$$

Réciproquement (§ XVII, 7; § IX, 1) on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{V}^2 \sin^2 xyz,$$

$$(\text{III})\qquad \left\{\begin{aligned} \mu_1 \text{V}^2 \sin^2 xyz &= h_1 \alpha_{11} + h_2 \alpha_{12} + h_3 \alpha_{13}, \\ \mu_2 \text{V}^2 \sin^2 xyz &= h_1 \alpha_{12} + h_2 a_{22} + h_3 \alpha_{23}, \\ \mu_3 \text{V}^2 \sin^2 xyz &= h_1 \alpha_{13} + h_2 \alpha_{23} + h_3 \alpha_{33}, \end{aligned}\right.$$

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots$ étant les coefficients de $a_{11}, a_{12}, \ldots$ dans le déterminant qui exprime $\text{V}^2 \sin^2 xyz$.

Au moyen des substitutions

$$\mu_1 \text{V} \sin xyz = 2 f_1 p_1, \text{ etc}\ldots \quad (7),$$

$$\alpha_{11} = 4 f_1^2, \quad \alpha_{12} = 4 f_1 f_2 \cos_{12}, \text{ etc}\ldots \quad (\S\ \text{XVII}, 3; \S\ \text{XVII}, 18),$$

on déduit des relations ci-dessus les suivantes

$$(\text{IV})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2} h_1 \text{V} \sin xyz &= f_1 p_1 a_{11} + f_2 p_2 a_{12} + f_3 p_3 a_{13}, \\ \frac{1}{2} h_2 \text{V} \sin xyz &= f_1 p_1 a_{12} + f_2 p_2 a_{22} + f_3 p_3 a_{23}, \\ \frac{1}{2} h_3 \text{V} \sin xyz &= f_1 p_1 a_{13} + f_2 p_2 a_{23} + f_3 p_3 a_{33}, \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h \text{V}^2 \sin^2 xyz = {} & f_1^2 p_1^2 a_{11} + f_2^2 p_2^2 a_{22} + f_3^2 p_3^2 a_{33} \\ & + 2 f_1 f_2 p_1 p_2 a_{12} + 2 f_1 f_3 p_1 p_3 a_{13} + 2 f_2 f_3 p_2 p_3 a_{23}, \end{aligned}$$

et réciproquement

$$(\mathrm{V})\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}p_1\,\mathrm{V}\sin xyz = h_1 f_1 \qquad + h_2 f_2\cos_{12} + h_3 f_3\cos_{13},\\ \frac{1}{2}p_2\,\mathrm{V}\sin xyz = h_1 f_1\cos_{12} + h_2 f_2 \qquad + h_3 f_3\cos_{23},\\ \frac{1}{2}p_3\,\mathrm{V}\sin xyz = h_1 f_1\cos_{13} + h_2 f_2\cos_{23} + h_3 f_3.\end{array}\right.$$

9. La relation entre quatre points A, B, C, D d'un même cercle peut s'exprimer au moyen des propriétés des angles, des distances ou des aires, qui sont déterminés par les points en question. D'après un théorème connu, contenu dans les *Éléments d'Euclide*, la différence des angles

$$\mathrm{ACB} - \mathrm{ADB} = 0 \quad \text{ou} \quad = 180^\circ,$$

d'où en général,

$$(\mathrm{I})\qquad 2(\mathrm{ACB} - \mathrm{ADB}) = 0 \ (^*),$$

lorsque les points donnés sont sur un même cercle, et que l'on prend avec le même signe les angles décrits par des rotations effectuées dans le même sens. L'angle zéro équivaut à 360°.

De plus, d'après le théorème de Ptolémée (*Almageste*, I, 9), on a

$$(\mathrm{II})\qquad \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0,$$

en désignant par p, q, r les produits des carrés des droites opposées qui joignent les quatre points du cercle A, B, C, D. On tire de cette équation l'équation rationnelle entre les carrés des distances mutuelles de ces quatre points. On peut établir une équation analogue à cette dernière entre

(*) MOEBIUS, *Kreisverwandtschaft*, § XIV.

les carrés des distances mutuelles de cinq points d'une sphère.

On connaît enfin les relations entre quatre points d'un cercle ou cinq points d'une sphère, et un autre point quelconque : la dernière de ces relations est contenue dans un théorème de Feuerbach (*Untersuchung der dreieckigen Pyramide*, p. 15), qui a été reproduit par Cayley (*Cambr. Math. Jour.*, II, p. 268) et par Luchterhandt (*Journal de Crelle*, XXIII, p. 375). Ces mêmes relations ont été déduites des principes du calcul barycentrique par Möbius (*Journal de Crelle*, XXVI, p. 26). Voici la méthode de Cayley, fondée sur l'emploi des déterminants :

Supposons que les points A, B, C, D d'un cercle soient donnés, par rapport à un système d'axes rectangulaires, dont l'origine est O, par leurs coordonnées (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). On a, comme on sait,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a + bx + cy, \\ x_1^2 + y_1^2 &= a + bx_1 + cy_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_3^2 + y_3^2 &= a + bx_3 + cy_3, \end{aligned}$$

et par suite (§ IX, 3)

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2 + y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_3^2 + y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant, d'après le § III, 6, donne, en ayant égard au § XVI, 5,

$$\text{OA}^2.\text{BCD} - \text{OB}^2.\text{CDA} + \text{OC}^2.\text{DAB} - \text{OD}^2.\text{ABC} = 0.$$

En construisant OP perpendiculaire au plan du cercle, et ajoutant à l'équation précédente l'identité (§ XVI, 5)

$$\text{OP}^2(\text{BCD} - \text{CDA} + \text{DAB} - \text{ABC}) = 0,$$

il vient

$$\text{(IV)} \quad PA^2.BCD - PB^2.CDA + PC^2.DAB - PD^2.ABC = 0,$$

P désignant un point quelconque de l'espace. On a en particulier, lorsque P coïncide avec D,

$$DA^2.BCD + DB^2.CAD + DC^2.ABD = 0.$$

Soient donnés pareillement les points A, B, C, D, E d'une sphère, rapportés à un système d'axes rectangulaires, par leurs coordonnées (x, y, z), etc... Des équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = a + bx + cy + dz,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = a + bx_4 + cy_4 + dz_4,$$

il résulte

$$\text{(V)} \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & 1 & x & y & z \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant (§ XVI, 6), il vient

$$\text{(VI)} \quad \left\{ \begin{array}{l} OA^2.BCDE + OB^2.CDEA + OC^2.DEAB + OD^2.EABC \\ \qquad + OE^2.ABCD = 0, \end{array} \right.$$

O désignant un point quelconque de l'espace. D'après les notations adoptées au § XVI, 7, on a

$$\mu_1 OA^2 + \mu_2 OB^2 + \mu_3 OC^2 + \mu\, OD^2 = OE^2;$$

c'est-à-dire que, si μ, μ_1, μ_2, μ_3 sont les coefficients coordonnés de E par rapport à la pyramide DABC, alors, pour tous les points O d'une sphère décrite du centre E, la quantité $\mu OD^2 + \mu_1 OA^2 + \mu_2 OB^2 + \mu_3 OC^2$ est constante (Feuerbach). On a en particulier

$$AB^2.CDEA + AC^2.DEAB + AD^2.EABC + AE^2.ABCD = 0,$$
$$\mu_1 DA^2 + \mu_2 DB^2 + \mu_3 DC^2 = DE^2.$$

En multipliant les déterminants (III) et (V) respectivement par

$$\begin{vmatrix} 1, & x^2+y^2, & -2x, & -2y \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_3^2+y_3^2, & -2x_3, & -2y_3 \end{vmatrix}$$

et par

$$\begin{vmatrix} 1, & x^2+y^2+z^2, & -2x, & -2y, & -2z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_4^2+y_4^2+z_4^2, & -2x_4, & -2y_4, & -2z_4 \end{vmatrix},$$

on trouve (§ VI, 3)

$$\begin{vmatrix} d_{00} & \dots & d_{03} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{30} & \dots & d_{33} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} d_{00} & \dots & d_{04} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{40} & \dots & d_{44} \end{vmatrix},$$

en faisant, dans le premier cas,

$$\begin{aligned} d_{00} &= x^2+y^2+x^2+y^2-2x^2-2y^2=0, \\ d_{01} &= x^2+y^2+x_1^2+y_1^2-2xx_1-2yy_1=\text{AB}^2, \\ d_{02} &= x^2+y^2+x_2^2+y_2^2-2xx_2-2yy_2=\text{AC}^2, \\ &\text{etc.....} \end{aligned}$$

et dans le second cas,

$$\begin{aligned} d_{00} &= x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2-2x^2-2y^2-2z^2=0, \\ d_{01} &= x^2+y^2+z^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-2xx_1-2yy_1-2zz_1=\text{AB}^2, \\ &\text{etc.....} \end{aligned}$$

Par conséquent l'équation annoncée entre les distances mutuelles de quatre points d'un cercle sera (Cayley)

$$\text{(VII)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$d_{i,k}$ désignant le carré de la distance du $i^{\text{ième}}$ point au $k^{\text{ième}}$.

L'équation analogue entre les distances mutuelles de

cinq points d'une sphère sera (Cayley)

$$(\text{VIII})\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces déterminants peuvent se développer d'après le § V, 2.

10. Les relations trouvées, de (III) à (VIII), ont lieu pour les points d'une ellipse ou d'une hyperbole, d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde (*), en divisant le carré de chaque distance par le carré du demi-diamètre qui lui est parallèle.

Démonstration. — Si, au lieu de la sphère, on considère une des surfaces du second degré dont nous avons parlé, et que les coordonnées orthogonales soient parallèles aux axes principaux de la surface, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a + bx + cy + dz$$

se changera en celle-ci,

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1 + b'x + c'y + d'z,$$

ε et ε_1 désignant l'unité positive ou négative. Il s'ensuit que, dans l'équation (V), $x^2 + y^2 + z^2$ se trouve remplacé par

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2.$$

Soit maintenant MA_1 le demi-diamètre de la surface qui

(*) L'extension des propositions précédentes à l'ellipse et à l'ellipsoïde a été remarquée par Brioschi (*Journal de Crelle*, t. L, p. 236).

a la même direction que OA, et soient, de plus, p, q, r les coordonnées de A_1 par rapport aux axes principaux de la surface. On a, par des propositions élémentaires,

$$x : y : z : OA = p : q : r : MA_1.$$

Mais, à cause de la relation connue

$$\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{q}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{r}{\gamma}\right)^2 = 1,$$

on a

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = \frac{OA^2}{MA_1^2} \text{ (*)}.$$

Par conséquent, dans (IV) et dans (VI), on introduira

$$\frac{OA^2}{MA_1^2}, \quad \frac{OB^2}{MB_1^2}, \quad \frac{OC^2}{MC_1^2}, \ldots,$$

au lieu de OA^2, OB^2, OC^2, ..., les autres quantités ne subissant aucun changement.

En multipliant ensuite le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2}, & 1, & x, & y, & z \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{x_4^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y_4^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z_4^2}{\gamma^2}, & 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix}$$

par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2}, & -2\frac{x}{\alpha^2}, & -2\varepsilon\frac{y}{\beta^2}, & -2\varepsilon_1\frac{z}{\gamma^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & \frac{x_4^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y_4^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z_4^2}{\gamma^2}, & -2\frac{x_4}{\alpha^2}, & -2\varepsilon\frac{y_4}{\beta^2}, & -2\varepsilon_1\frac{z_4}{\gamma^2} \end{vmatrix},$$

(*) Cette propriété a été indiquée par Joachimsthal, *Journal de Crelle*, t XL, p 32.

il vient l'expression

$$\begin{vmatrix} d_{00} & \dots & d_{04} \\ \dots & & \dots \\ d_{40} & \dots & d_{44} \end{vmatrix},$$

en posant

$$\left.\begin{array}{l} d_{00} = \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\dfrac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\dfrac{z^2}{\gamma^2} + \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} \\ + \varepsilon_1\dfrac{z^2}{\gamma^2} - 2\dfrac{x^2}{\alpha^2} - 2\varepsilon\dfrac{y^2}{\beta^2} - 2\varepsilon_1\dfrac{z^2}{\gamma^2} \end{array}\right\} = 0,$$

$$d_{01} = \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y_1^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z_1^2}{\gamma^2} - 2\frac{xx_1}{\alpha^2} - 2\varepsilon\frac{yy_1}{\beta^2}$$

$$- 2\varepsilon_1\frac{zz_1}{\gamma^2}$$

$$= \left(\frac{x - x_1}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y - y_1}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z - z_1}{\gamma}\right)^2,$$

expression que l'on trouve, comme ci-dessus, égale à AB^2 divisé par le carré du demi-diamètre parallèle à AB; et ainsi de suite.

11. Une section conique du second degré est déterminée par un de ses foyers O et par trois autres points A, B, C; par conséquent quatre points et un foyer d'une même conique doivent avoir entre eux une certaine relation. La surface de révolution du second degré qui résulte de la rotation d'une section conique autour de son axe principal, est déterminée par un de ses foyers O et par quatre autres points A, B, C, D, de sorte qu'il doit exister une relation entre cinq points d'une pareille surface et l'un de ses foyers. Ces relations ont été indiquées et démontrées par Möbius (*Journal de Crelle,* t. XXVI, p. 29).

On peut déduire ces relations de ce théorème connu, que le rayon vecteur $OA = r$ d'une section conique ou d'une surface de révolution de l'espèce indiquée est une fonction

linéaire des coordonnées x, y, ou x, y, z du point A, par rapport à des axes quelconques. Soient x_1, y_1 ou x_1, y_1, z_1 les coordonnées de B, etc....; on a

$$\begin{array}{ll} r = a + bx + cy, & r = a + bx + cy + dz, \\ r_1 = a + bx_1 + cy_1, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_2 = a + bx_2 + cy_2, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_3 = a + bx_3 + cy_3; & r_4 = a + bx_4 + cy_4 + dz_4; \end{array}$$

par conséquent (§ IX, 3),

$$\begin{vmatrix} r & 1 & x & y \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ r_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ r_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} r & 1 & x & y & z \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire (§ XVI, 5, 6)

$$\text{(I)} \quad OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0,$$

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} OA.BCDE + OB.CDEA + OC.DEAB + OD.EABC \\ \qquad + OE.ABCD = 0. \end{array} \right.$$

Si A, B, C, D sont situés sur la surface de révolution, et en même temps sur un plan passant par O, on a $ABCD = 0$, et

$$BCDE : -CDAE : DABE : -ABCE$$
$$= BCD : -CDA : DAB : -ABC,$$

et par suite

$$OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0;$$

c'est-à-dire que la surface de révolution est coupée par un plan passant par un de ses foyers, suivant une ligne du second degré dont ce point est un foyer (Möbius, *l. c.*).

12. La relation entre les distances mutuelles de cinq points dans l'espace a été donnée pour la première fois par Lagrange sous une forme trop peu développée; puis elle a

été traitée à plusieurs reprises par Carnot, sans que l'on parvînt à un résultat présenté avec clarté (3). La relation la plus simple entre cinq points de l'espace A, B, C, D, E, dont les coordonnées par rapport à trois axes quelconques sont (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., s'obtient en développant d'après le § III, 6, l'identité (§ II, 4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

et interprétant, au moyen du § XVI, 6, les déterminants du quatrième degré auxquels on parvient, ce qui donne

$$\text{(I)} \qquad \text{BCDE} + \text{CDEA} + \text{DEAB} + \text{EABC} + \text{ABCD} = 0,$$

équation qui coïncide avec l'équation connue que l'on rencontre au § XVI, 7. En exprimant les volumes de chacun des tétraèdres en fonction de leurs arêtes (§ XVII, 14, corollaire I), on obtient une équation irrationnelle, dont le second membre est zéro, et dont le premier membre est la somme des racines carrées de cinq déterminants du cinquième degré. Pour rendre cette équation rationnelle, il n'est pas nécessaire de faire le produit des différentes valeurs que peut prendre le premier membre, en vertu de l'ambiguïté des radicaux carrés. Il suffit, ce qui est préférable, de multiplier l'équation (I) par un de ses termes, parce que le produit de deux tétraèdres est une fonction rationnelle des carrés des droites qui joignent les sommets de l'un des tétraèdres avec les sommets de l'autre (§ XVII, 14).

L'équation cherchée a été développée pour la première fois sous une forme plus simple par Cayley (*Cambr. Math. J.*, II, p. 268). Par analogie avec la méthode donnée

au n° 9, Cayley a multiplié le déterminant plus général

$$R = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2, & x_5, & y_5, & z_5, & u_5 \end{vmatrix}$$

par

$$16R = \begin{vmatrix} 1 & , 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2, & 1, & -2x_1, & -2y_1, & -2z_1, & -2u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2, & 1, & -2x_5, & -2y_5, & -2z_5, & -2u_5 \end{vmatrix}.$$

On trouve ainsi (§ VI, 3)

$$-16R^2 = \begin{vmatrix} h_{00} \ldots h_{05} \\ \ldots\ldots \\ h_{50} \ldots h_{55} \end{vmatrix}.$$

où l'on a $h_{k,i} = h_{k,i}$ (§ VI, 2), et de plus

$$h_{00} = 0, \quad h_{01} = 1, \quad h_{02} = 1, \quad \ldots, \quad h_{05} = 1,$$

$$h_{11} = h_{22} = \ldots = h_{55} = 0,$$

$$h_{12} = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 - 2x_1 x_2 - 2y_1 y_2$$
$$- 2z_1 z_2 - 2u_1 u_2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (u_1 - u_2)^2,$$

etc....

Si les quantités indéterminées $u_1, u_2, \ldots, u_5$ sont nulles, R s'annule pareillement (§ III, 2). Si l'on considère en même temps x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées rectangulaires du point A, etc...., on a $h_{12} = AB^2$, etc.... En désignant les carrés des distances du 1er point au 2e, au 3e, ..., comme ci-dessus, par $d_{12}, d_{13} \ldots$, on a l'é-

quation cherchée,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut développer ce déterminant d'après le § V, 2, ou simplement d'après le § III, 1. Dans ce dernier cas on trouve

$$\delta_{01} + \delta_{02} + \delta_{03} + \delta_{04} + \delta_{05} = 0,$$

en désignant par δ_{01}, δ_{02}, ... les coefficients qui multiplient dans le déterminant les éléments de la première ligne horizontale. Mais on a, dans le cas d'une notation analogue (§ VII, 5),

$$\delta_{01} : \delta_{02} : \delta_{03} : \delta_{04} : \delta_{05} := \sqrt{\delta_{11}} : \sqrt{\delta_{22}} : \sqrt{\delta_{33}} : \sqrt{\delta_{44}} : \sqrt{\delta_{55}},$$

puisque le déterminant est nul, et que $d_{k,i} = d_{k,i}$, d'où résulte $\delta_{i,k} = \delta_{k,i}$ (§ III, 9). Par conséquent

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} + \sqrt{\delta_{55}} = 0,$$

ce qui s'accorde (§ XVII, 14) avec l'équation (I).

Corollaire. — On trouvera de la même manière les équations entre les carrés des distances mutuelles de quatre points A, B, C, D d'un même plan, ou de trois points A, B, C d'une même droite (§ XVII, 13, 14). On trouve, en effet, dans le premier cas, en conservant les mêmes notations,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} = 0,$$

ce qui s'accorde avec

$$BCD - CDA + DAB - ABC = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0;$$

dans le second cas

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} = 0,$$

ce qui s'accorde avec

$$AB + BC + CA = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations peuvent s'obtenir aussi au moyen du n° 9 (VII et VIII). Si, en effet, de cinq points d'une sphère, l'un est situé à l'infini, on a par exemple

$$1 = \frac{d_{01}}{d_{01}} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{d_{03}}{d_{01}} = \frac{d_{04}}{d_{01}},$$

et les quatre autres points sont dans un même plan. Et si, de quatre points d'un cercle, l'un est à une distance infinie, les trois autres points sont sur une même droite.

FIN.

